

Exercice 1 :(3 pts)

Donner la réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

Si on suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Alors :

a) La fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$ admet un extremum local sur $]0, 1[$

b) La fonction f est croissante sur $[0,1]$.

c) Il existe un réel c de $]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.

2) Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $g(1) = -\frac{1}{4}$ et $g'(1) = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\pi g(x)) + 1}{x-1} = : \quad \text{a) } \pi \quad ; \quad \text{b) } 0 \quad ; \quad \text{c) } \frac{\pi}{2}$$

3) Soit n un entier naturel. Le nombre $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un réel strictement positif si et seulement si, n s'écrit sous la forme de $3k$ (où k est un entier naturel)

a) $3k$; b) $6k$; c) $12k$

Exercice 2 :(6,5 pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère Orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2+4})^3}$ et Dresser le le tableau de variation de f .

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) \leq \frac{1}{2}$

d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathbb{R} une seule solution α et que $\alpha \in]1,6 ; 1,7[$. En déduire que pour tout $x \leq \alpha$, $f(x) \geq x$.

2) Tracer Γ .

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0=1$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est monotone et en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 3: (4,5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point A d'affixe 2 et \mathcal{C} le cercle de centre O passant par A. On pose $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

1) a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$ appartiennent au cercle \mathcal{C} . Construire \mathcal{C} et placer les points A, B et C.

2) Soit D un point du cercle \mathcal{C} d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$. et E l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Justifier que le point E a pour affixe $Z_E = \alpha e^{i\theta}$ et placer les points D et E.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a) Justifier que les affixes des points F et G sont respectivement

$$Z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} \text{ et } Z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}.$$

b) Démontrer que $\frac{Z_G - 2}{Z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. (On pourra utiliser la question 1) a)).

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit AFED un carré de côté 4 cm tel que $(\widehat{AF, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à (EF).

1) a) Soit R la rotation définie par $R(F) = E$ et $R(E) = D$. Préciser l'angle et le centre de R.

b) Soit $f = R \circ S_{(OI)}$ où $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI).

Montrer que $f = S_{(OE)}$

2) Soit $R' = t_{\vec{OI}} \circ R^{-1}$ où $t_{\vec{OI}}$ désigne la translation de vecteur \vec{OI} et R^{-1} désigne la réciproque de R.

a) Déterminer les images des points O, F et A par R' .

b) Déduire que R' est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3) On pose Δ la médiatrice du segment [AF] et soit $g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta} \circ S_{(OI)}$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Soit M un point du plan.

Montrer que $g(M) = R'(M)$ si et seulement si $f(M) = M$

c) On déduire l'ensemble des points M tel que $g(M) = R'(M)$.

Bon Travail

