

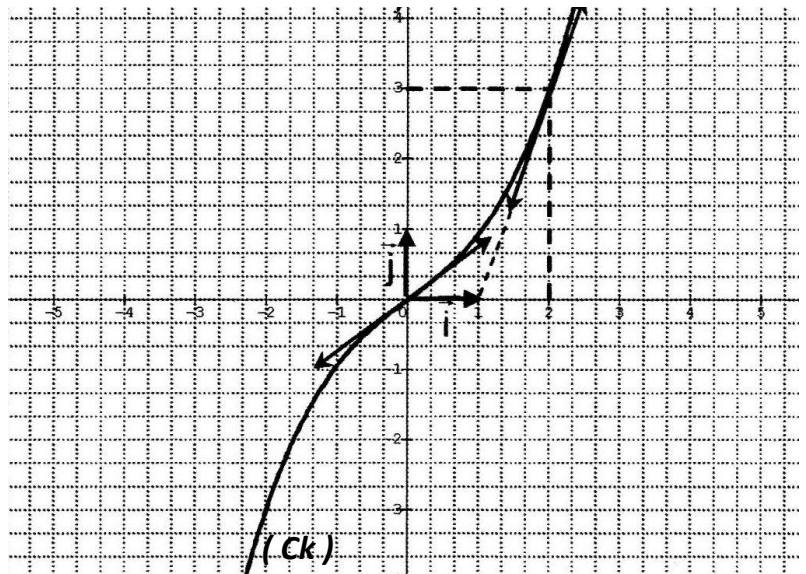
EXERCICE N: 1 (3 points)

Sans justification , répondre par vrai ou faux .

1) Si g est une fonction dérivable sur $[-1 ; 2]$ alors il existe un réel $\alpha \in]-1 ; 2[$ vérifiant :
 $3 g'(\alpha) - g(2) + g(-1) = 0$.

2) h est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors $|h(-3) - h(5)| < 5$

3) Ci-contre sont tracées la courbe (C_k) d'une fonction k impaire , deux fois dérivable sur \mathbb{R} et strictement croissante ainsi que les tangentes à (C_k) aux points d'abscisses 0 et 2 .



- a)** k'' ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
- b)** $(k^{-1})'(3) = 3$.
- c)** la fonction réciproque k^{-1} est impaire .
- d)** la fonction dérivée k' est impaire .

EXERCICE N: 2 (4 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct ,on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $AB = 2AD$.

Soient I, J et F les points définies par : $I = A * B$; $J = D * C$ et $C = B * F$.

- 1) a)** Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A en C et I en J .
b) Caractériser φ .
- 2)** Soit (\mathcal{C}) le cercle de diamètre [AB] et (\mathcal{C}') le cercle de diamètre [CD] .
 La droite (BD) recoupe (\mathcal{C}) en M et (\mathcal{C}') en N , on pose $M' = S_{(IJ)}(M)$.
a) Montre que : $N = \varphi(M)$.
b) Déduire que les droites (M'N) et (BC) sont parallèles .
- 3) a)** Montrer qu'il existe une unique isométrie ψ vérifiant : $\psi(A) = C$, $\psi(I) = J$ et $\psi(D) = F$.
b) Montrer que ψ est un antidéplacement .
c) Déterminer $\psi(B)$ puis donner la nature de ψ et ses éléments caractéristiques .
- 4)** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $f = \psi \circ S_{(AD)}$.

EXERCICE N: 3 (5 points)

A) Soit la fonction f définie sur $] - \infty ; \pi [$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x - 2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0 .

2) Etudier la dérivabilité de f en 0 .

3) Soit g la restriction de f à $] - \infty ; 0 [$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $] - \infty ; 0 [$ sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

B) Soit h la restriction de f à $[0 ; \pi [$.

1) Justifier que h admet une réciproque h^{-1} définie sur J .

2) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J et que $(h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

C) Pour tout $x \in] 0 ; + \infty [$, on pose $\varphi(x) = h^{-1}(\sqrt{x}) + h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1) Montrer que φ est dérivable sur $] 0 ; + \infty [$ et calculer $\varphi'(x)$.

2) Calculer $h^{-1}(1)$ puis déduire que pour tout $x \in] 0 ; + \infty [$, $h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi - h^{-1}(\sqrt{x})$.

D) On considère les suites (U_n) et (V_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} h^{-1}(\sqrt{k}) \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) .$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $h^{-1}(\sqrt{n}) \leq U_n \leq h^{-1}(\sqrt{2n})$.

2) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Exprimer V_n en fonction de U_n .

b) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

EXERCICE N: 4 (4 points)

On tracé ci-contre dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes (C_f) et (C_g) de deux fonctions f et g . On pose : $h = g \circ f$.

1) a) Déterminer l'image de $] - \infty ; 1 [$ par f .

b) Justifier que h est définie sur $[1 ; + \infty [$

2) Résoudre graphiquement : $h(x) = 0$.

3) Calculer : $h(1)$; $h'(2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de h .

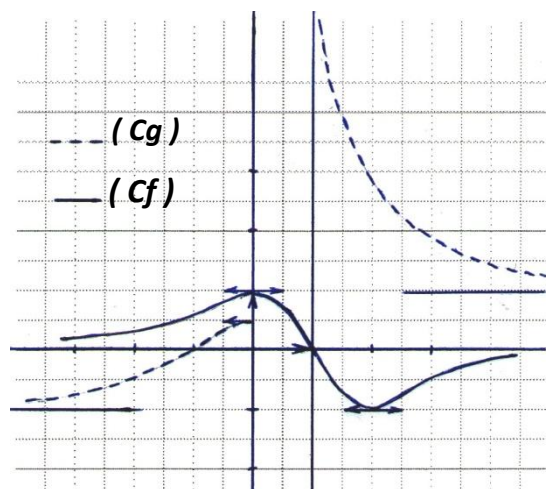
5) Soit l'équation (E) : $h(x) = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$.

a) Montrer que (E) admet exactement deux solutions

a_n et b_n tels que : $a_n \in] 1 ; 2 [$ et $b_n > 2$.

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante .

c) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes .



EXERCICE N: 5 (4 points)

Soit l'équation $(E_\theta) : Z^2 - e^{i\theta} [2 + \sqrt{2}(-1 + i)]Z + 2\sqrt{2}(-1 + i)e^{i2\theta} = 0 ; \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

A) 1) Vérifier que $Z_0 = 2e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ) .

2) Déduire alors l'autre solution Z_1 de l'équation (E_θ) .

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On donne les points M, M' et M'' d'affixes respectives :

$$Z = 2e^{i\theta}, \quad Z' = \sqrt{2}(-1 + i)e^{i\theta} \quad \text{et} \quad Z'' = i + 4e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})}.$$

1) Montrer que M' est l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

2) Montrer que M'' est l'image de M' par une homothétie h que l'on caractérisera.

3) Déduire l'ensemble (Γ) des points M'' lorsque θ varie dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.

C) Soit l'équation $(E'_\theta) : (\sqrt{2}Z - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}Z^3$.

1) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $a = (-2 + 2i)e^{i\theta}$.

2) Soit $\alpha \in]0; 2\pi[$. Montrer que $\frac{\sqrt{2}Z - 1}{Z} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \Leftrightarrow Z = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i \cotg \frac{\alpha}{2})$.

3) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E'_θ) . (Donner les solutions sous la forme cartésienne)