LYCEE THELEPTE

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Enseignant : HAFSI Salem

4ème Math

Epreuve : Mathématiques

: 3Heures

08-12-2010

Exercice 1 :(3 pts)

Donner la réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit f une fonction continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[.

Si on suppose que f(0) = 0 et f(1) = 1. Alors :

a) La fonction g définie sur [0, 1] par g(x) = f(x) – x admet un extremum local sur]0, 1[

b) La fonction f est croissante sur [0,1].

c) Il existe un réel c de]0,1[tel que f'(c)=0.

2) Soit g une fonction dérivable sur IR telle que $g(1)=-\frac{1}{4}$ et $g'(1)=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{tan(\pi g(x))+1}{x-1} =$: a) π ; b) 0 ; c) $\frac{\pi}{2}$

3) Soit n un entier naturel. Le nombre $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ est un réel strictement positif si et seulement si, n s'écrit sous la forme de :(où k est un entier naturel)

a) 3k ; b) 6k ; c) 12k

Exercice 2 :(6,5 pts)

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère Orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$

b) Vérifier que pour tout $x \in IR$; $f'(x) = \frac{4}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}$ et Dresser le le tableau de variation de f.

c) Montrer que pour tout $x \in IR$; $f'(x) \le \frac{1}{2}$

d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une seule solution α et que $\alpha \in \left]1,6\,;1,7\right[$. En déduire que pour tout $x \le \alpha$, $f(x) \ge x$.

2) Tracer Γ.

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0=1$ et pour tout $n \ge 0$, $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \le U_n \le \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est monotone et en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 3: (4,5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point A d'affixe 2 et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par A. On pose $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

1) a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}$. Construire $\mathcal{C}$ et placer les points A, B et C .

2) Soit D un point du cercle $\mathcal{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
et E l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Justifier que le point E a pour affixe $Z_E = \alpha e^{i\theta}$ et placer les points D et E.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a) Justifier que les affixes des points F et G sont respectivement

$$Z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} \text{ et } Z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}.$$

b) Démontrer que $\frac{Z_G - 2}{Z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. (On pourra utiliser la question 1) a)).

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit AFED un carré de coté 4 cm tel que $(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à (EF).

1) a) Soit R la rotation définie par R (F) = E et R (E) = D. Préciser l'angle et le centre de R.

b) Soit $f = R \circ S_{(OI)}$ où $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe(OI).
Montrer que $f = S_{(OE)}$

2) Soit $R' = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OI}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ et R^{-1} désigne la réciproque de R.

a) Déterminer les images de O, F et E par R'.

b) Déduire que R' est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3) On pose Δ la médiatrice du segment [AF] et soit $g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta} \circ S_{(OI)}$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Soit M un point du plan.
Montrer que g(M)= R'(M) si et seulement si f(M)=M

c) On déduire l'ensemble des points M tel que g(M)= R'(M).

Bon Travail