Prof : **Devoir de synthèse N°1** **Lycée Bir Ali**

Bouchelliga Taieb **4éme année Maths** **Année scolaire : 2011-2012**

Durée:3h

Exercice 1 :(4pts)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$, la suite réelle définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$

1) Calculer u_1 ,u_2 et u_3 .
2) Montrer que (u_n) est croissante.
3) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
4) En déduire que la suite (u_n) est convergente .

Exercice 2 :(6pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) a) Vérifier que pour tout réel non nul x : $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

   b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que l'équation f(x) = x , admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\propto$. Vérifier que $\propto \in]0,1[$.
4) Etudier la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation y = x .
5) Soit h la fonction définie sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$ par $h(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{\cos x}) & ; \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2 & ; \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

   a) Justifier que h est continue sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$.

   b) Etudier la continuité de h à droite en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 :(5pts)

Soit $\theta \in [0,\pi]$.

1) a) Vérifier que $\cos^2\theta + 2i\sin\theta = (1+i\sin\theta)^2$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $i z^2 - 2z\cos\theta - 2\sin\theta = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives –i, 2i, $z=\sin\theta-i-i\cos\theta$ et $z'=-\sin\theta+i-i\cos\theta$.

   a) Calculer AM et donner une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{AM})$ en fonction de θ .En déduire l'ensemble des points M lorsque θ décrit l'intervalle $[0,\pi]$.

   b) Vérifier que : $z'=-\overline{z}+2i$ .En déduire une construction du point M' à partir des points M et B.

   c) Ecrire z et z' sous forme exponentielle.

   d) Pour quelles valeurs de θ , les points O, M et M' sont ils alignés?

Exercice 4 :(5pts)

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O .On note I, J et K les milieux respectifs de [AB],[BC] et [CA].

Soit f une isométrie telle que f(A) = B et f(B) = C.

1) On suppose que f fixe un point du plan.

   a) Justifier que f ne peut être une symétrie orthogonale.

   b) En déduire que f est une rotation dont on précisera le centre et une mesure de son angle

2) On suppose que f ne fixe aucun point du plan.

   a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

   b) Construire le point C' = f(C).

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $RoS_{(AJ)}$ à l'aide de deux méthodes :

   a) En déterminant les images des points O ,B et C par $RoS_{(AJ)}$.

   b) En décomposant R en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis.

4) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BJ}$. On pose : g = RoT.

   Montrer que g est une rotation dont on précisera le centre et une mesure de son angle.