EXERCICE 1 (4 points)

Indiquer la bonne réponse pour chacune des questions suivantes :

1) Soit A le point du plan complexe d'affixe (-1). Si z est un nombre complexe tel que $|z+1|=1$ alors

a) z = 0 b) $M(z) \in C_{(A,\,1)}$ c) $M \in$ med [OA]

2) Si $U_n = \dfrac{5^n - 3^n}{5^n + 2^n}$, alors la limite de ($U_n$) est :

a) $+\infty$ b) 0 c) 1

3) Si z et z' sont les solutions dans C de l'équation $2z^2 + (1+5i)z + 2 = 0$ alors :

a) $z = \dfrac{1}{z'}$ b) z = - z' c) $z' = \bar{z}$

4) La limite de $\sqrt{x^2 + x + 1} - x$ en $+\infty$ est

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $+\infty$ c) 0

EXERCICE 2 : (6 points)

I)Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x+3}{x+3}$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que $\forall\, x \geq 1$; $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.

II) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = 1$ et pour tout entier n ,$U_{n+1} = f(U_n)$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq U_n \leq 3$

2) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
 b) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout entier n , on a : $|U_{n+1} - 3| \leq \dfrac{3}{4}|U_n - 3|$.

 b) En déduire que pour tout entier n ; $|U_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

 c) Retrouver alors la limite de (U_n).

EXERCICE 3 (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 + 4x + 4$
 a) Dresser le tableau de variation de f.
 b) Montrer que l'équation f(x) =0 admet dans IR une solution unique α . Vérifier que $\alpha \in \left]-1;0\right[$
 c) Déterminer suivant les valeurs de x , le signe de f(x)

2) Soit g la fontion définie sur $\left]-\infty,0\right]$ par $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

 a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\infty,0\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout réel x de J.

c) Soit C la courbe de g dans un RON. Déterminer la position de C par rapport à la droite D : y = x+1.

EXERCICE 4 :(5 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (1 - 3i) z - 4 = 0$

b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

2) Pour tout nombre complexe z , on pose $f(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i) z - 8i$

a) Vérifier que $f(-2i)=0$

b) Déterminer les complexes b et c tels que $f(z) = (z+2i)(z^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives : 1+i ; -2i et -2+2i.

a) Ecrire sous forme exponentielle le complexe $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$. En déduire la nature du triangla ABC.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z , tels que $\dfrac{z+2i}{z-1-i}$ soit imaginaire.

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z , tels que $|iz - 2| = 3$.