Exo. n°13 : **(Enoncé)**

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les plan $\left(P_m\right): 2x+2y-z+m=0$; où m un paramètre réel et les points A$(3,-2,-1)$; B$(-1,2,-1)$

1°/ Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de diamètre $[AB]$.

Déterminer son rayon R et les coordonnées de son centre I.

2°/ Déterminer les réel m pour lesquels $\left(P_m\right)$ est tangent à S.

3°/ Déterminer une équation cartésienne du plan (P') perpendiculaire à $\left(P_m\right)$ contenant la droite (AB).

4°/ Soit Q le plan parallèle à $\left(P_m\right)$ et contenant le point C(0,0,1).

a / Déterminer une équation cartésienne de Q.
b / Donner la position relative de Q et S.
c / Caractériser Q $\cap$ S.

Exo. n°13 : **(Solution)**

1°/ On a : A$(3,-2,-1)$ B$(-1,2,-1)$ deux points de l'espace ξ.

Soit S la sphère de diamètre $[AB]$.

1ère méthode : $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\\z+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z+1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)+(y+2)(y-2)+(z+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2z-6=0$$

Soit : S : $\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=8$ **une équation cartésienne de S.**

2ème méthode : le centre de la sphère S de diamètre $[AB]$ est le point I milieu de $[AB]$, et de rayon R $=\dfrac{AB}{2}$

I$\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ d'où: $I(1,0,-1)$ et $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(2+2)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

d'où $R=2\sqrt{2}$ **Donc :** $S(I,R):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=0$

2°/ On a le plan $\left(P_m\right): 2x+2y-z+m=0$; m étant un paramètre réel.

$\left(P_m\right)$ est tangent à S $\Leftrightarrow d\left(I,P_m\right)=R \Leftrightarrow \dfrac{|2+1+m|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |m+3|=6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow m+3=6\sqrt{2}$ ou $m+3=-6\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $m=-3+6\sqrt{2}$ ou $m=-3-6\sqrt{2}$

3°/ Soit P' le plan perpendiculaire à (P_m) et contenant la droite (AB).

Le plan P' est perpendiculaire à (P_m) donc le vecteur normal $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ de (P_m) est un vecteur directeur de P'

La droite (AB) est contenue dans P' donc le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ de (AB) est un vecteur directeur de P'.

Les vecteurs $\vec{N}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc $\left(\vec{N},\overrightarrow{AB}\right)$ est une base de P'.

Si on pose : $\vec{N}'=\vec{N}\wedge\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\16\end{pmatrix}$ un vecteur normal du plan P' et $P':4x+4y+16z+d=0$

d ? on a $A(3,-2,-1)\in(AB)\subset P'$ donc $A\in P'\Leftrightarrow 12-8-16+d=0\Leftrightarrow d=12$.

Donc : P' **:** $x+y+4z+3=0$

4°/ a / On a : $Q\parallel(P_m)$ donc le vecteur normal $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ de (P_m) est aussi un vecteur normal de Q

d'où une équation cartésienne de Q est : $2x+2y-z+d=0$.

Le point : $C(0,0,1)\in Q\Leftrightarrow -1+d=0\Leftrightarrow d=1$ **Il en résulte que Q :** $2x+2y-z+1=0$**.**

b / $d(I,Q)=\dfrac{|2+1+1|}{3}=\dfrac{4}{3}<2\sqrt{2}=R$ **donc S$\cap$Q est un cercle** C (H,r)

c / On a : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{8-\dfrac{16}{9}}=\dfrac{\sqrt{56}}{3}$ et H le projeté orthogonal de I sur Q

Le point $H(x,y,z)$ vérifie : $\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\beta\vec{N}\ ;\ \beta\in\mathbb{R}\\ H\in Q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2\beta & (1)\\ y=2\beta & (2)\\ z=-1-\beta & (3)\\ 2x+2y-z+1=0 & (4)\end{cases}$

(4) donne : $2+4\beta+4\beta+1+\beta+1=0$; nous en déduisons $\beta=-\dfrac{4}{9}$ d'où : $H\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{-8}{9},-\dfrac{5}{9}\right)$