Prof : Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. (Complexe bac scientifique)

EXO.: (Enoncé)

1°/ a / Calculer $(1-3i)^2$

b / Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-(1+i)z+2+2i=0$

2°/ Soit f le polynôme définie par : $f(z)=z^3-(2+i)z^2+3(1+i)z-2(1+i)$; où $z\in\mathbb{C}$

a / Montrer que l'équation (E): $f(z)=0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

b / Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que : $f(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$

c / Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$, (E) et écrire les solutions de sous forme trigonométrique.

EXO. : (Solution)

1°/ a / $(1-3i)^2=(1)^2+(3i)^2-2(1)(3i)=1-9-6i=-8-6i$

b / (E) : $(z-1)(z^2-(1+i)z+2+2i)=0$

Le discriminant : $\Delta=(1+i)^2-4(2+2i)=-8-6i=(1-3i)^2$

Donc : $\delta=1-3i$ est une racine carrée de Δ

D'où : $z^2-(1+i)z+2+2i=0 \quad\Leftrightarrow\quad z=\dfrac{1+i+1-3i}{2}=1-i$ ou $z=\dfrac{1+i-1+3i}{2}=2i$

2°/ a / Soit x un réel

$z_0=x$ est une solution réelle de l'équation : $(E)\ \Leftrightarrow\ f(x)=0$

$\Leftrightarrow\ x^3-(2+i)x^2+3(1+i)x-2(1+i)=0$

$\Leftrightarrow\ (x^3-2x^2+3x-2)+i(-x^2+3x-2)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-2x^2+3x-2=0\\ x^2-3x+2=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ x=1$$

(la seconde équation a deux solution 1 et 2 **Mais** seul 1 vérifie la première)

Donc : $z_0=1$ est une solution réelle de (E)

b / $z^3-(2+i)z^2+3(1+i)z-2(1+i)=(z-1)(az^2+bz+c)$

$$=az^3+bz^2+cz-az^2-bz-c$$

$$=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$$

Par identification on obtient :

$\begin{cases} a=1 \\ b-a=-2-i \\ c-b=3+3i \\ -c=-2-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1-i \\ c=2+2i \end{cases}$ **Donc :** $f(z)=(z-1)\left(z^2-(1+i)z+2+2i\right)$

b / L' équation (E): $z^3-(2+i)z^2+3(1+i)z-2(1+i)=0$

$$\Leftrightarrow \quad (z-1)\left(z^2-(1+i)z+2+2i\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad z-1=0 \quad \text{ou} \quad z^2-(1+i)z+2+2i=0$$

Donc les solutions sont les trois nombres complexes : $z_0=1$, $z_1=1-i$ et $z_2=2i$

Donc : $S_{\mathbb{C}}=\{\,1\,,\,1-i\,,\,2i\,\}$

c / $z_0=1=1(\cos 0+i\sin 0)$; $z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

et $z_2=2i=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

FATNASSI BECHIR

Prof : Mr. FATNASSI BECHIR