Lycée Nafta **Prof : GUESMIA AZIZA**	**Série corrigée** **Chap.7 Calcul vectoriel**	**Classe : 2ème Sciences** **Octobre 2016**

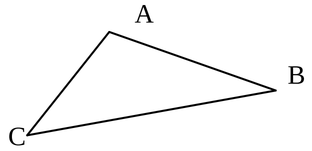
Exercice 1

Soit un triangle *ABC*.

1. Construire les points *D* et *E* vérifiant : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire géométriquement ?
3. Montrer que $\overrightarrow{BE} = 2\,\overrightarrow{CA}$. Déduire de cette égalité et de la précédente que *E*, *B* et *D* sont alignés.
4. Soit I le milieu de [AB]. Justifier que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$. Qu'en déduire pour les droites (*AE*) et (*CI*) ?

Correction

1.



2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

On en déduit que *ABDC* est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires, les points *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Comme *I* est le milieu de [*AB*], on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

D'où $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI}$.

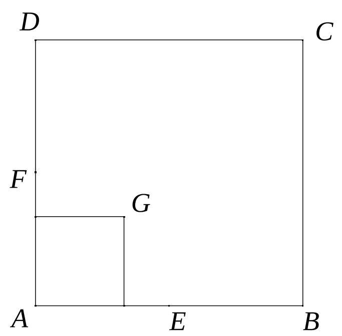
On en déduit que, comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, alors $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CI}$.

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CI}$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Les droites (*AE*) et (*CI*) sont parallèles.

Exercice 2

Soit *ABCD* un carré, *E* le milieu de [*AB*], *F* le milieu de [*AD*]. On pose *AE* = 1.

1. Donner les coordonnées des points *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})$.
2. a. Ecrire l'équation de la droite (*BF*).
   b. Soit $G(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3})$. Montrer que *G* appartient à la droite (*BF*).
3. Montrer que les points *D*, *E* et *G* sont alignés.
4. Que représente *G* pour le triangle *ABD* ? Justifier.
5. Que peut-on en déduire sur la droite (*AC*) ? Justifier.



Correction

1. *A* (0 ; 0), *B* (2 ; 0), *C* (2 ; 2), *D* (0 ; 2), *E* (1 ; 0) et *F* (0 ; 1).
2. a. Soit M$(x\,;\,y)$ un point du plan ; M ∈ (*BF*) signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires ⇔ $\begin{vmatrix} x-2 & 0-2 \\ y-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 1(x-2) - (-2)y = x + 2y - 2 = 0$;

D'où une équation de la droite (*BF*) : $x + 2y - 2 = 0$.

b. On remplace *x* et *y* par les coordonnées de *G* : $\frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{3} - 2 = 0$; on déduit que *G* appartient à la droite (*BF*).

3. Pour montrer que les points *D*, *E* et *G* sont alignés on peut monter que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix}$; det $(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{EG}) = \begin{vmatrix} 1-0 & \frac{2}{3}-1 \\ 0-2 & \frac{2}{3}-0 \end{vmatrix} = 1 \times \frac{2}{3} - (-2) \times \left(\frac{2}{3} - 1\right) = 0$ donc les points *D*, *E* et *G* sont alignés

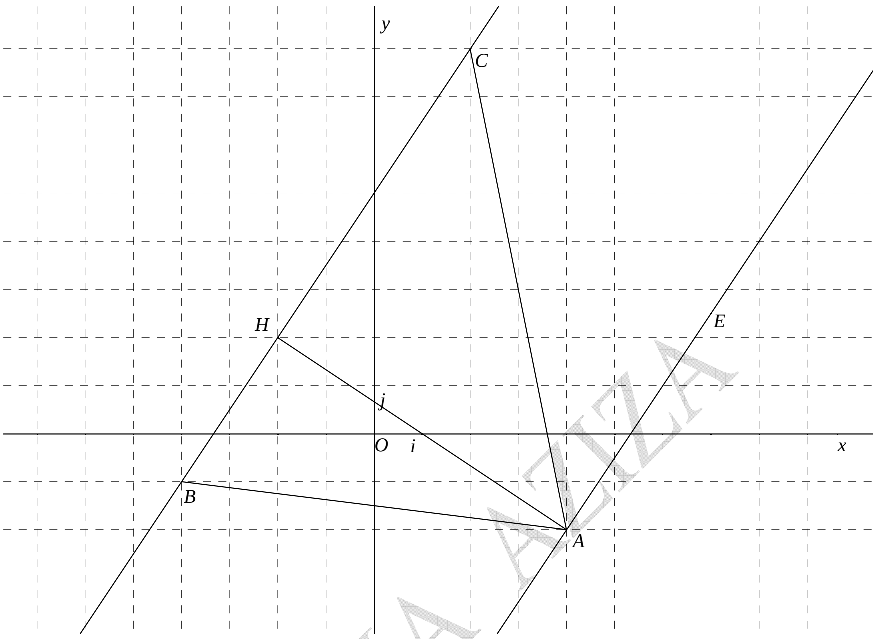
4. (*DE*) est une médiane puisque *E* est le milieu de [*AB*], de même (*BF*) est une médiane donc *G* est le centre de gravité du triangle *ABD*.
5. (*AC*) est la troisième médiane puisqu'elle passe par le centre du carré, soit par le milieu de [*DB*]. *A*, *G* et *C* sont alignés. En fait la droite (*AC*) a pour équation *y* = *x* qui contient évidemment *G*.

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), on considère les points : $A(4\,;-2)$; $B(-4\,;-1)$; $C(2\,;8)$ et $H(-2\,;2)$.

1. Faire une figure et montrer que les points *B*, *C* et *H* sont alignés.
2. a. Calculer les distances *AH*, *BH* et *AB*.
   b. Démontrer que le triangle *AHB* est rectangle en *H*.
3. Calculer l'aire du triangle *ABC*.
4. Soit (D) la droite qui passe par *A* et qui est parallèle à (*BC*).
   a. Déterminer une équation de (D).
   b. Le point $E\left(7\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ appartient-il à (D) ?
   c. Quelle est l'aire du triangle *BCE* ?

Correction



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$, on considère les points $A(4\ ;-2)$; $B(-4\ ;-1)$; $C(2\ ;8)$ et $H(-2\ ;2)$.

1. *B*, *C* et *H* sont alignés : det $(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BH}\ ) = \begin{vmatrix} 2+4 & -2+4 \\ 8+1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$.

2. a. $AH = \sqrt{(-2-4)^2+(2+2)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$, $BH = \sqrt{(-2+4)^2+(2+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

$AB = \sqrt{(-4-4)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.

b. Pythagore dans *AHB* : $AH^2 + BH^2 = 52+13 = 65 = AB^2$

3. Le triangle *ABC* a pour base *BC* et pour hauteur *AH*. Il suffit donc de calculer *BC* :

$BC = \sqrt{(2+4)^2+(8+1)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$ d'où l'aire du triangle *ABC* : $\dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{52}.\sqrt{117} = 39$.

4. a. (D) passe par *A* et est parallèle à (*BC*). Soit $M(x\ ;y)$ un point du plan ; $M \in (BC)$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

det $(\overrightarrow{AM}\ ;\overrightarrow{BC}\ ) = \begin{vmatrix} x-4 & 6 \\ y+2 & 9 \end{vmatrix} = 9(x-4) - 6(y+2) = 0$; une équation de la droite (D). $3x - 2y - 16 = 0$.

c. $E(7\ ;\ \frac{5}{2}\ )$ appartient à (D) ? $3 \times 7 - 2 \times \frac{5}{2} - 16 = 0$: on déduit que $E(7\ ;\ \frac{5}{2}\ )$ appartient à (D).

d. L'aire du triangle *BCE* est la même que celle du triangle *ABC*… (même base *BC* et même hauteur *AH*).

Exercice 4

Soit *ABCD* un parallélogramme. On considère les points *E* et *F* tels que $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

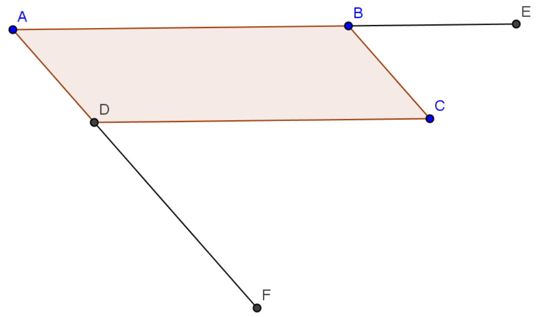
Faire une figure.

b) Démontrer que : $\overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ et que : $\overrightarrow{EF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{DA}$.

En déduire que les points *C*, *E* et *F* sont alignés.

Correction

a)



b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

De même, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$ donc $-\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA}$. Or $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $3\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. D'où $3\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{EF}$. Par suite les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, donc les points C, E et F sont alignés.

<u>Exercice 5 :</u> Les questions sont indépendantes

Dans un repère on donne A (- 2 ; 1), B (3 ; 3), C(- 5 ; - 3), D(5 ; 1) et T (0 ; - 1). On nomme K le point de coordonnées (- 1 *; y*).

1) Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?
2) Les points C, D et T sont-ils alignés ?
3) Calculer le réel *y* tel que C, K et A soient alignés.
4) Calculer les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
5) Calculer les coordonnées du point E symétrique de T par rapport au point C. Le point R est le milieu de [AC]. Les points E, R, B sont-ils alignés ?

<u>Correction</u>

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$. Donc on voit que$(-3) \times (-2) - (-4) \times 2 \neq 0$. D'où ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

1) On a $\overrightarrow{DT}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$. Donc on voit que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DT}$. D'où ces vecteurs sont colinéaires et les points D, T et C sont alignés (voire même, T est le milieu de [DC]).

2) On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\y-1\end{pmatrix}$. Or on aura A, K et C alignés ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires. C'est-à-dire ssi : $-3(y-1) - (-4) \times 1 = 0$. On résout cette équation : $-3y + 3 + 4 = 0, -3y = -7, donc\ y = \frac{7}{3}$.

3) On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\1-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}3-x\\3-y\end{pmatrix}$. Donc on aura $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ssi les coordonnées du vecteur somme sont nulles. Or ce vecteur a pour coordonnées : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-4-2x+9-3x = 5-5x\\2-2y+9-3y = 11-5y\end{pmatrix}$. D'où le système : $\begin{cases}5-5x = 0\\11-5y = 0\end{cases}$. Par suite on a donc $M\left(1; \frac{11}{5}\right)$.

E sera symétrique de T par rapport à C ssi C est le milieu de [ET]. D'où les coordonnées de E (-10 ; -5).

R milieu de [AC] donc R$\left(-\frac{7}{2}; -1\right)$. On a $\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}$. Donc on voit que $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$. D'où ces vecteurs sont colinéaires et les points E, R et B sont alignés (voire même, R est le milieu de [EB]).

<u>Exercice 6 :</u>

Soit *ABC* un triangle quelconque. *A'* le milieu de [*BC*], *G* le centre de gravité du triangle, *D* et *E* les points tels que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note *I* le milieu de [*DE*].

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

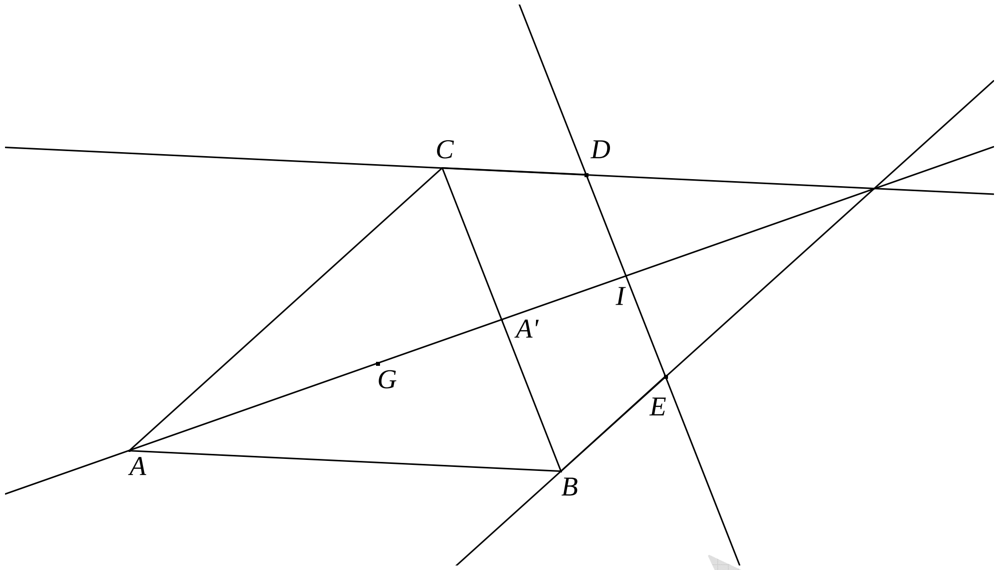
c. Démontrer que les points *A, A'* et *I* sont alignés.

2. Démontrer que le point *G* est le milieu de [*AI*].

3. Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Correction

(On utilise un repère)



1. a. Prenons le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} \right)$ où A a pour coordonnées (0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1).

Des données de construction on tire que $E\left(1\,;\dfrac{1}{3}\right)$ et $D\left(\dfrac{1}{3}\,;1\right)$, soit $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$ ou encore $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Les coordonnées de A' sont $A'\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c. Calculons le déterminant des vecteurs : $\det\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AI}\right)=\begin{vmatrix}1/2 & 2/3\\ 1/2 & 2/3\end{vmatrix}=0$

On peut également remarquer que $2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2. Les coordonnées de G sont $G\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ d'où $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AG}$ et G est le milieu de [AI].

3. $\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{ED}\right)=\begin{vmatrix}0-1 & \dfrac{1}{3}-1\\ 1-0 & 1-\dfrac{1}{3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -\dfrac{2}{3}\\ 1 & \dfrac{2}{3}\end{vmatrix}=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=0$ donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 4 **Correction en classe**

Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), un repère orthonormé du plan. (Aucun schéma n'est demandé)

On considère les points $A(0\,,\ 4)$; $B(-2\,,0)$ et $C(6\,,1)$.

1) Montrer que ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2) a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

b) Déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit D$(-6{,}7)$. Les points A, C et D sont-ils alignés ?

4) Calculer les distances BC et BD. Déduire que le point B appartient à la médiatrice du segment [CD].