Série d'exercices *** 2ème Sciences | Lycée Secondaire Ali Zouaoui

NOTION DE POLYNOMES

" Hajeb Laayoun "

Définition:

Soient $a_0, a_1, \dots$ *et* a_n *des réels.*

La fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_1x+a_0$ *est appelée fonction polynôme.*

Les réels a_i, $0\le i\le n$ *sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.*

Degré d'un polynôme :

➢ *Soit* P *une fonction polynôme* $(P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_1x+a_0)$ *dont les coefficients ne sont pas tous nuls. Le plus grand entier* k *tel que* $a_k\neq 0$ *est appelé le degré de* P *et on écrit* $\boxed{d^0(P)=k}$.

On convient que le polynôme nul n'a pas de degré.

➢ *Soient* f *et* g *deux fonctions polynôme distinctes de la fonction nulle et telles que* $f+g$ *soit distincte la fonction nulle; alors* $\boxed{d^0(f+g)\le \sup\left(d^0(f),d^0(g)\right)}$

➢ *Soient* f *et* g *deux fonctions polynôme alors* $f\times g$ *est une fonction polynôme et si t* f *et* g *sont distinctes de la fonction nulle; alors* $\boxed{d^0(f\times g)=d^0(f)+d^0(g)}$

➢ *On dit que le polynôme* P *est factorisable par le polynôme* Q *s'il existe un polynôme* R *tel que pour tout réel* x, $P(x)=Q(x)\times R(x)$.

Racine (ou zéro) d'un polynôme :

On dit qu'un réel α *est une racine ou un zéro d'un polynôme* f *si* $f(\alpha)=0$.

❶ *Soit* f *une fonction polynôme de degré* n.

Pour tout $n\ge 1$, *si* α *est une racine de* f *alors :*

⇨ f *est factorisable par* $x-\alpha$.

⇨ *Il existe un polynôme* g *de degré* $(n-1)$ *tel que* $f(x)=(x-\alpha)g(x)$.

❷ *Soit* f *une fonction polynôme de degré* n.

Pour tout $n\ge 2$, *si* α *et* β *sont deux racines de* f *alors :*

⇨ f *est factorisable par* $(x-\alpha)(x-\beta)$.

⇨ *Il existe un polynôme* g *de degré* $(n-2)$ *tel que* $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$.

❸ *Soit* f *une fonction polynôme de degré* n.

Pour tout $n\ge k$, *si* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k-1}$ *et* α_k *sont des racines de* f *alors :*

⇨ f *est factorisable par* $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\times\dots\times(x-\alpha_k)$.

⇨ *Il existe un polynôme* g *de degré* $(n-k)$ *tel que:*

$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\times\dots\times(x-\alpha_k)g(x)$.

Exercice N°1:

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1°) (a) $f(x)=x^3+12x^3+5$; (b) $g(x)=\sqrt{3}x^{18}+\frac{2}{9}x^9-2\sqrt{2}$.

2°) (a) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$; (b) $g(x)=\sqrt{|x|-2}$.

3°) (a) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+6x+5}$; (b) $g(x)=\frac{-x+1}{|x+2|+5}$

Exercice N°2:

Soit le polynôme $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x-2$.

1°) *Montrer que* $\alpha=1+\sqrt{2}$ *et* $\beta=1-\sqrt{2}$ *sont des racines de* P.

2°) *Factoriser alors* $P(x)$.

Exercice N°3:

Soit la fraction rationnelle $F(x)=\frac{2}{x^2+3x+2}$.

1°) *Déterminer* D_F *le domaine de définition de* F.

2°) *Déterminer les deux réels* a *et* b *tels que pour tout* $x\in D_F$ *, on a :*

$$F(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$$

3°) *Calculer alors la somme :*

$$S=\frac{1}{1^2+3+2}+\frac{1}{2^2+3\times 2+2}+\frac{1}{3^2+3\times 3+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+3\times n+2} \text{ où } n\in\mathbb{N}^*.$$

Exercice N°4:

Soient $P(x)=x^n+x+1$ *et* $Q(x)=x^2+3x-4$ *où* $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

On suppose qu'ils existe deux polynômes S *et* R *tel que :*

$P(x)=Q(x)\times S(x)+R(x)$ *avec* $d^0(R)=1$.

1°) *Déterminer le degré de* S.

2°) *Déterminer le polynôme* $R(x)$ *en fonction de* x *et* n.