

### Exercice 1 :

ABC est un triangle équilatéral direct et M est un point intérieur à ce triangle. L; K et H sont respectivement les projetés orthogonaux de M sur (AB); (BC) et (CA). Soit r la rotation directe de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $M' = r(M)$

- 1) Montrer que BMM' est un triangle équilatéral.
- 2) Soit L' le projeté orthogonal de M' sur (AB).
  - a) Déterminer en justifiant les images des droites (BC) et (KM) par r.
  - b) Montrer alors que  $r(K) = L'$  puis en déduire que  $ML' = MK$
- 3) Soit  $\Delta$  la parallèle à (AB) menée par M'.  $\Delta$  coupe (ML) en N.
  - a) Montrer que  $MN = ML + MK$
  - b) Soit N' l'image de N par la rotation directe de centre M et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Montrer que  $r(\Delta) = (BN')$ .
  - c) Montrer que N' ; M et H sont alignés.
- 4) En déduire que  $ML + MK + MH = HN'$

### Exercice 2 :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B. O le milieu de [AC] et r est la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- 1) Construire  $D = r(B)$  et montrer que ABCD est un carré.
- 2) Déterminer  $r((AB))$  et montrer  $r((BC)) = (CD)$ .
- 3) Construire  $E = r(C)$  et montrer que D est le milieu de [CE].
- 4) Soit  $\zeta$  le cercle circonscrit au carré ABCD.
  - a) Déterminer le centre I du cercle  $\zeta'$  image de  $\zeta$  par r.
  - b) Déterminer  $\zeta \cap \zeta'$  (expliquer).
- 5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et G' le barycentre des points pondérés (D ; 1) et (I ; 2).
  - a) Montrer que  $r(G) = G'$ .
  - b) La droite (AG) recoupe  $\zeta$  en H et la droite (AG') recoupe  $\zeta'$  en H'. Montrer que le triangle AHH' est rectangle et isocèle.

### Exercice 3 :

ABCD est un carré direct. Soit M un point de [AD], M distinct de D. La droite (CM) coupe (AB) en Q. La perpendiculaire à (CM) en C coupe respectivement (AB) en P et (AD) en N. Soit r le quart de tour direct de centre C.

- 1) Trouver l'image de la droite (AD) par r.
- 2) a) Montrer que  $r(M) = P$  puis déterminer r(N)
- b) Préciser la nature des triangles CMP et CNQ
- c) Montrer que les droites (MP) et (NQ) sont perpendiculaires.

### Exercice 4 :

On donne un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle  $\zeta$  de centre O. Soit r la rotation directe de centre O et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

- 1) a) Déterminer r(A) et r(B)
- b) Déterminer l'image de (OA) et l'image de  $\zeta$  par r.
- 2) Les droites (OA) et (OB) recoupent  $\zeta$  respectivement en H et H'. Montrer que le triangle OHH' est équilatéral.
- 3) Soit M un point de  $\zeta \setminus \{A\}$  et N le point tel que AMN est un triangle équilatéral direct. Quel est l'ensemble des points N lorsque M décrit  $\zeta \setminus \{A\}$ .

### Exercice 5 :

ABC est un triangle direct. On note I le milieu de [BC]. On construit à l'extérieure de ce triangle les points B' et C' tel que ACC' et BAB' soient deux triangles rectangle et isocèles en A. On pose  $O' = C * C'$  et  $O'' = B * B'$ .

- 1) a) Montrer que  $CC' = BB'$  et que  $(CC') \perp (BB')$
- b) En déduire que le triangle IOO' est rectangle et isocèle.
- 2) Soient :  $H = S_A(B)$  et  $K = S_A(C)$ . Les droites (CB') et (HC') se coupent en F et les droites (BC') et (KB') se coupent en F'.
  - a) Montrer que C' est l'image de H par le quart de tour direct de centre A.
  - b) Montrer que le triangle AFF' est rectangle et isocèle en A.

### Exercice 6 :

ABCD est un carré direct de centre O. Soit  $M \in [AB]$  et  $N \in [BC]$  tel que  $BM = CN$ .

- 1) En utilisant le quart de tour direct de centre I montrer que  $IM = IN$ .
- 2) Déterminer la position du point M sur le segment [AB] pour que la distance MN soit minimale et calculer sa valeur.
- 3) La droite (IM) coupe (DC) en P.
  - a) Montrer que les triangles IB ? et IAM sont isométriques.
  - b) En déduire que l'aire du quadrilatère IMBN est le quart de celle du carré.

- 4) Soit J le point tel que ABJ est un triangle équilatéral direct. K est l'image de B par la rotation directe de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Montrer que A, C et K sont alignés.

### **Exercice 7 :**

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et I le milieu de [BC]. On suppose que ABC est orienté dans le sens direct.

La droite ( $\Delta$ ) passant par C et perpendiculaire à (BC) coupe (AB) en D. Soit R la rotation directe de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- 1) Faire une figure.
- 2) a) Déterminer R(B)  
b) Déterminer les images des droites (AC) et (BC) par R.  
c) En déduire R(C)
- 3) Déterminer et construire J = R(I)
- 4) Soit ( $\zeta$ ) le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer et construire ( $\zeta'$ ) = R( $\zeta$ )
- 5) La bissectrice de l'angle  $\hat{A}IB$  recoupe ( $\zeta$ ) en M. La perpendiculaire en A à (AM) recoupe ( $\zeta'$ ) en N.  
Montrer que AMN est un triangle rectangle et isocèle en A.

### **Exercice 8 :**

Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que  $\hat{A}BC = \frac{\pi}{6}$  et  $\zeta$  le cercle circonscrit à ce triangle. La médiatrice  $\Delta$  de [AC] coupe

l'arc [BC] de  $\zeta$  ne contenant pas A en un point I. On désigne par O le milieu de [BC] et par R la rotation indirecte de centre I et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

- 1) Montrer que R(A) = C
- 2) a) Construire le point C' image de C par R.  
b) Montrer que (CC') est perpendiculaire à (BC)  
c) En déduire que (BC) est l'image de (AB) par R.
- 3) a) Placer le point B' image de B par R.  
b) Montrer que les points I, C, C' et B' sont situés sur un même cercle  $\zeta'$  que l'on précisera.

### **Exercice 9 :**

Soit ABI un triangle équilatéral direct  $\Omega$  le symétrique de B par rapport à (AI) r la rotation directe de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

- 1) Montrer que r(A) = I et conclure le point C = r(B)
- 2) Montrer que I est le milieu de [AC]
- 3) A tout point M  $\in$  [AB] distinct de A et B on associe le point M'  $\in$  [IC] tel que AM = IM'  
Montrer que le triangle  $\Omega MM'$  est équilatéral.

### **Exercice 10 :**

Soit ABCD un carré de centre O orienté dans le sens direct. Soient I, J et K les milieux respectifs de [AD], [CD] et [AB]. R étant la rotation directe de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- 1) a) Déterminer r(A) et r(D). En déduire r(I)  
b) Montrer que (IB) et (CK) sont perpendiculaires.
- 2) La droite (IB) coupe respectivement (AJ) et (CK) en E et E'. Montrer que le triangle OEE' est rectangle et isocèle en O.
- 3) Soit M un point du segment [AD]. La perpendiculaire à (MC) passant par D coupe (AB) en M'.
  - a) Déterminer l'image de (MC) par r.
  - b) En déduire que r(M) = M' et que DM = AM'.
  - c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit [AD]
- 4) Les cercles de centres respectifs A et D et passant par O se coupent en H. Montrer que le quadrilatère OAHD est un carré.

### **Exercice 11 :**

Soit  $xOy = \frac{\pi}{4}$ ; A un point de [Ox) et B un point de [Oy) tel que OA = OB.

- 1) Soit A' le projeté orthogonal de A sur [Oy) et B' le projeté orthogonal de B sur [Ox)
  - a) Soit r la rotation directe de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Montrer que r([AB']) = [BA']
  - b) Déterminer l'image de (OA) par r.
  - c) Soit ( $\zeta$ ) le cercle de centre O et passant par A et B, déterminer r( $\zeta$ ).
- 2) Les deux droites (AA') et (BB') sont sécantes en I. Soit la rotation r' de centre I tel que r'(A) = B
  - a) Déterminer en radian l'angle de la rotation r'
  - b) Montrer que r'(A') = B'.

### **Exercice 12 :**

Soit ABCD un parallélogramme direct.

On trace à l'extérieur de ABCD les triangles : OAD rectangle et isocèle en O et DCE rectangle et isocèle en D.

On considère r le quart de tour direct de centre O.

- 1) Donner l'image de A par r.
- 2) Déterminer en justifiant l'image de la droite (AB) par r
- 3) Montrer alors que r(B) = E puis en déduire la nature du triangle OBE.
- 4) a) Construire le point F image de D par r.  
b) En déduire que les trois points A, O et F sont alignés  
c) Montrer que (EF)  $\perp$  (BD) et que BD = EF.

### **Exercice 12 :**

On considère un triangle ABC.

On considère la rotation indirecte  $r$  de centre A et d'angle  $90^\circ$ . Cette rotation transforme B et C en des points D et E.

On note F le symétrique de D par rapport à A et I le milieu de [BC].

- Quelle est l'image de I par  $r$  ?
- Démontrer que les droites (EF) et (AI) sont perpendiculaires et que l'on a  $EF = 2AI$ .

### **Exercice**

Soit ABC un triangle (quelconque) direct et H son orthocentre.

On considère  $r$  le quart de tour direct de centre A et  $S_A$  la symétrie centrale de centre A ;  $r'$  le quart de tour indirecte de centre A.

- Construire les points  $r(B) = B'$  ;  $r'(C) = C'$  et  $C'' = S_A(C')$
- Montrer que  $r(C) = C''$
- Montrer que les droites (BC) et (B'C'') sont perpendiculaires.
- Montrer que (AH) est la droite portant la médiane du triangle AC'B' issue de A.

### **Exercice**

$\zeta$  et  $\zeta'$  sont deux cercles de même rayon sécants en A et B tel que le centre O de  $\zeta$  appartient à  $\zeta'$ .

- Donner la nature du triangle AOO'.
  - Donner la nature du quadrilatère AOBO'.
- Soit  $r$  la rotation de centre A qui transforme  $\zeta$  en  $\zeta'$ 
  - Préciser en radian l'angle  $\alpha$  de la rotation  $r$ .
  - La droite (OO') recoupe  $\zeta$  en E et  $\zeta'$  en F. Montrer que  $r(B) = F$  et  $r(E) = B$ .
- Une droite  $\Delta$  passant par B et distincte de (AB) recoupe  $\zeta$  en M et  $\zeta'$  en M'.
  - Donner la nature du triangle AMM'
  - Soit D la tangente à  $\zeta$  en M et D' la tangente à  $\zeta'$  en M', montrer que  $r(D) = D'$ .

### **Exercice**

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et O le milieu de [BC]

On suppose que ABC est orienté dans le sens direct.

- Construire le point B' image de B par la rotation  $r$  de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  dans le sens direct.
- Montrer que B' est l'image de O par une homothétie  $h$  de centre A dont on précisera son rapport  $k$ .
  - Construire alors le point C' image de C par l'homothétie de centre A et de rapport  $k$ .
  - Donner la nature du triangle AB'C'
- Soit O' le projeté orthogonal de B' sur (AC) montrer que  $r(O) = O'$ .
  - Préciser alors l'image de la droite (BC) par  $r$ .

### **Exercice**

On donne un triangle quelconque ABC.

On construit à l'extérieure de ce triangle les carrés ABDE et ACFG.

En utilisant une rotation convenable montrer que :

- $EC = BG$
- (EC) est perpendiculaire à (BG)

### **Exercice**

On donne deux droites (D) et (D') strictement parallèles et A un point n'appartenant ni à (D) ni à (D').

- Construire un triangle équilatéral ABC tel que  $B \in (D)$  et  $C \in (D')$
- Construire un triangle rectangle isocèle AEF de sommet principale A tel que  $E \in (D)$  et  $F \in (D')$

### **Exercice**

Soit un carré ABCD de centre O. E est un point de [AB], F est un point de [BC], G est un point de [CD] et H est un point de [DA] tels que  $AE = BF = CG = DH$ .

En utilisant une rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , montrer que EFGH est un carré.