Dream big, work hard, make it happen.

Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie par :$\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.
   b. Etudier les variations de f puis préciser les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Construire la courbe $\mathscr{C}$.
2. Soit D_m la droite d'équation $y=2x+m$; où $m \in \mathbb{R}$.
   a. Montrer que pour tout réel m;D_m coupe $\mathscr{C}$ en deux points M' et M''distincts.
   b. Déterminer l'ensemble des milieux I_m des segments $[M'M'']$ quand m varie.
3. Soit $A(1,-1)$,$\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et R' le repère $(A,\vec{u},\vec{j})$.
   a. Montrer que est la courbe de la fonction $g : x \to \dfrac{4}{x}$ dans le repère R'.
   b. Donner relativement à R' une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ en un point M_0 d'abscisse x_0.
   c. Déterminer les coordonnées des points T et T' intersection de Δ avec $D(A,\vec{u})$ et $D'(A,\vec{j})$. Montrer que M_0 est le milieu de $[TT']$.
   d. Montrer que pour tout point M_0 les droites (AT) et (AT') sont perpendiculaires.

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-\dfrac{x^2}{4}+x+1$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Etudier la fonction f et représenter sa courbe $\mathscr{C}$.
2. Soit m un paramètre réel, on considère les droites D_m d'équations $y=mx+4-3m$. Prouver que toutes les droites passent par un point fixe que l'on déterminera.
3. Soit $F(2,1)$ et D la droite d'équation : $y=3$. Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x,y),et on désigne par H son projeté orthogonal sur D.
   a. Montrer que $MF^2-MH^2=x^2-4x+4y-4$.
   b. Que se passe-t-il si M est un point de $\mathscr{C}$?
   c. Quelle est, dans ce cas, la nature du triangle MFH?

Exercice 3 **(5 points)**

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. a. Montrer que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
   b. En déduire que $\cos(2\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$
   c. Vérifier que α est solution de l'équation : $\cos(4x) = \sin(x)$
2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\cos(4x) = \sin(x)$.
   b. En déduire que $\alpha = \frac{\pi}{10}$.
3. a. Montrer que pour tout réel x on a : $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x = 2$.
   c. Résoudre dans $[0, 2\pi[$, l'inéquation : $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x \geqslant 2$.

Exercice 4 **(5 points)**

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre $[BC]$ et de centre O.
A un point de $(\mathscr{C})$ tel que : $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ I le point de $[AB]$ tel que $AI = AC$.

1. a. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$.
   b. En déduire que le triangle IBC est isocèle en I.
2. a. Montrer qu'il existe une seule rotation R telle que : $R(C) = I$ et $R(I) = B$.
   b. Préciser l'angle de R et construire son centre Ω .
   c. Montrer que Ω appartient au cercle $(\mathscr{C})$
   d. Montrer que O, I et Ω sont alignés.
3. La médiatrice de $[IB]$ recoupe $(\mathscr{C})$ en J.
   a. Montrer que A et J sont symétriques par rapport à (OI) et que C, I et J sont alignés
   b. En déduire que $R(A) = J$.