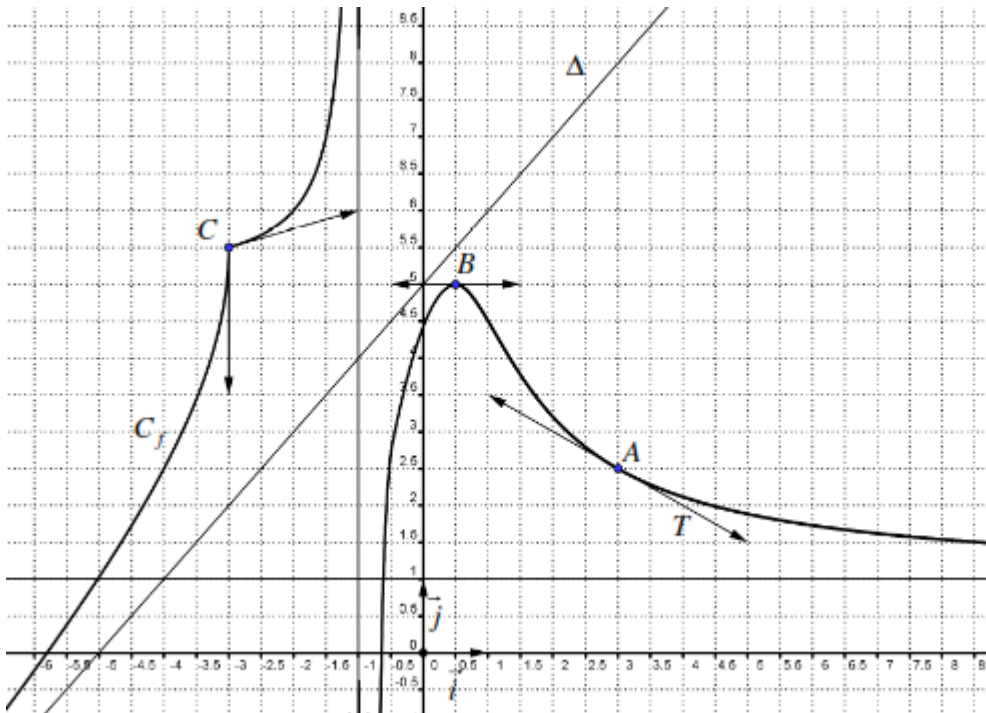


**Exercice 1 :** (6points)

Ci-dessous la courbe représentative d'une fonction  $f$  telle que :

- $\Delta$  une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$
- $y = 1$  une asymptote au voisinage de  $+\infty$
- $x = -1$  asymptote verticale
- Les flèches représentent des tangentes et des demi-tangentes



1. Ecrire l'ensemble de définition de  $f$  et les intervalles sur lesquels elle est continue.
2. Ecrire l'équation de  $\Delta$
3. Utiliser le graphique pour calculer les limites suivantes :
  - a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
  - b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 - f(x)}$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty^+} \frac{f(x) - 5,5}{x + 3}$  ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 4}{f(x) - 5}$
4. Donner les valeurs suivantes :  $f(3)$  ;  $f'(3)$  ;  $f'(\frac{1}{2})$  ;  $f'_d(-3)$  et écrire une valeur approchée de  $f(3,001)$
5. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - 5,5}{3 + x}$  ;  $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$
6. Dresser le tableau de variation de  $f$  et préciser ses extrémums locaux

**Exercice 2 :** (6points)

I/ Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$  On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  on a  $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^2}$

2) a) Déterminer les points de  $C_f$  où la tangente est parallèle à la droite  $(O, \vec{i})$ .

b) Déterminer les points de  $C_f$  où la tangente est parallèle à la droite  $\Delta: y = -3x + 1$

II/ Soit la fonction, définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que  $g$  est continue en 0.

2) Etudier la dérivabilité de  $g$  en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Justifier que  $g$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  et calculer  $g'(x)$  sur chacun de ces intervalles.

b) Déterminer le signe de  $g'(x)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de  $g$  .,

4) Déterminer les extrémums de  $g$  et préciser leurs natures.

### **Exercice 3 : (6points)**

Soit  $f(x) = 2\cos 2x + 7\sin x - 5$  où  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

1. Vérifier que :  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 7y + 3 = 0$ , où  $y = \sin x$

2. Montrer que :  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

3. Résoudre dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , l'équation :  $f(x) = 0$ .

### **Exercice 4 : (5points)**

Les parties I/ et II/ sont totalement indépendantes

I/ 1. Montrer que :  $2\cos 2x \cdot \cos 4x - \cos x - \cos 3x = 2\cos 2x(\cos 4x - \cos x)$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0, \pi]$  l'équation :  $2\cos 2x \cdot \cos 4x = \cos x + \cos 3x$

II/ Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $\Phi(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

1. Montrer que  $\Phi(x)$  est un réel constant.

2. Vérifier que  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{3}{16}$

Posons  $\alpha = \sin^2 x$  et  $\beta = \cos^2 x$

3. Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  solutions de l'équation  $y^2 - y + \frac{3}{16} = 0$

4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$