Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 2** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 07 / 03 / 2017	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x)=1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$.

On donne, sur la feuille annexe, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et déterminer $f'(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) $a/$ Montrer que l'équation: $f(x)=0$ admet dans $[1\,;+\infty[$ une solution unique α.

$b/$ Vérifier que $2<\alpha<3$.

$c/$ Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Montrer que la droite $\Delta : y=-\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

5) Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{4\sqrt{x^2-1}+2}{x}$.

On désigne par Γ la représentation graphique de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la feuille annexe.

$a/$ Etudier la dérivabilité de g à droite en 1.

$b/$ Montrer que, pour tout $x\in]1\,;+\infty[$, $g'(x)=\frac{4f(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

$c/$ Dresser le tableau de variations de g.

$d/$ Vérifier que $g(\alpha)=\frac{10}{\alpha}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha\approx 2,25$.

$e/$ Tracer la courbe Γ.

Exercice n°2 : (6 pts)

1) $a/$ Montrer que, pour tout réel x on a : $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ et que : $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

$b/$ En déduire que, pour tout réel θ on a : $1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

$c/$ On considère le nombre complexe $z=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Vérifier que : $z = 1+\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$. En déduire la forme trigonométrique de z.

$d/$ Montrer alors que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.
On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_1 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ et $z_2 = 3-\cos\theta - i\sin\theta$, où θ est un réel de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

$a/$ Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.

$b/$ Calculer $|z_1 - 1|$, en déduire que M_1 appartient à un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

$c/$ Construire les points M_1 et M_2 dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{6}$.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $\theta \in [0\ ;\ \pi]$ on a : $M_1M_2 = 4\sin\frac{\theta}{2}$.

$b/$ Déterminer la valeur de θ pour que $M_1M_2 = 2$.

Exercice n°3 : (6 pts)

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2}{2U_n}$.

$b/$ Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in IN$, $U_n > \sqrt{2}$.

2) Montrer que la suite U est décroissante.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$.

$c/$ En déduire que, pour tout $n \in IN$, $U_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$d/$ Montrer alors qua la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de contrôle n° 2 *(07 – 03 – 2017)*

Nom et prénom :…………………………………………………… *Classe : 3 ème Math*