Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 2	3 Mathématique 2
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	24 - 02 - 2016

EXERCICE N : 1 (4.5 points)

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

1) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < U_n < 2$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $\dfrac{2 - U_{n+1}}{2 - U_n} = \dfrac{1}{2+\sqrt{2+U_n}}$.

b) Déduire que pour tout $n \in IN$: $2 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - U_n)$.

c) Prouver alors que pour tout $n \in IN$: $0 < 2 - U_n \leq (\frac{1}{2})^n$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a : $U_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3.2^n}\right)$.

b) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE N : 2 (6 points)

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$.

On désigne par $A_{(i)}$, $B_{(2i - 1)}$ et $C_{(1 + 2i)}$. Soit $f : P \setminus \{A\} \rightarrow P$; $M_Z \mapsto M'_{Z'}$ avec : $Z' = \dfrac{iZ}{Z - i}$.

1) Déterminer les points invariants par f .

2) a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que $|Z'| = 1$ **.**

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que Z' est réel .

3) a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombre complexes $Z_B - Z_A$ et $Z_C - Z_A$.

4) a) Vérifier que pour tout $Z \neq i$ on a : $(Z' - i) (Z - i) = - 1$.

b) Déduire que pour tout M , distinct de A , on a **:** $AM . AM' = 1$ et $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}) \equiv \pi \ (2\pi)$.

c) Montrer que si M appartient au cercle ***(𝒞)*** de centre A et de rayon 1 alors M'appartient à ***(𝒞)***

d) Montrer que si M appartient à [AB) privée de A alors M' appartient à [AC) .

EXERCICE N : 3 (9.5 points)

Soit f_m la fonction définie sur IR par : $f_m(x) = m x^4 - 2x^3 + (3 - 2m)x^2 + m$ où m paramètre réel .

On désigne par **(C$_m$)** la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) Montrer que toutes les courbes **(C$_m$)** passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées .

B) 1) Dresser le tableau de variations de f_1 .

2) Soit l'équation : (E_a) $x^4 - 2x^3 + x^2 = \boldsymbol{a}$ où **a** est un paramètre réel .

En utilisant le tableau de variations de f_1 , déterminer les valeurs de **a** pour que (E_a) admet exactement quatre solutions .

3) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de **(C$_1$)** .

C) Dans toute la suite on prend : m = 0 , on note : f_0 par f et **(C$_0$)** par **(C f)**

1) Dresser le tableau de variations de f .

2) a) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion pour **(C f)** .

b) Donner une équation cartésienne de la tangente **(T)** à **(C f)** au point I .

c) Résoudre dans IR l'équation : $f(x) = 0$

d) Tracer **(T)** et **(C f)** dans le repère R .

3) Soit D_α la droite d' équation : $y = \alpha x$ où α est un paramètre réel .

a) Déterminer , suivant les valeurs de α , le nombre de point(s) d'intersection de D_α et **(C f)** .

b) Lorsque **(** D_α **)** coupe **(C f)** en deux points distincts M' et M'' autres que l'origine O du repère R , prouver que : $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''} = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{2}$.

c) Déduire les valeurs de α pour que le point $O \in [M'M'']$.

4) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 2|x|^3 - 3x^2$.

a) Etudier la parité de g .

b) Tracer **(C g)** à partir de **(C f)** , expliquer .