Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 2** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 02 / 02 / 2015	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : *il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (7,5 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Déterminer le domaine de définition de f.

   $b/$ Montrer que la droite $D: x=-1$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

2) $a/$ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

   $b/$ Montrer que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et déterminer $f'(x)$.

   $c/$ Etablir le tableau de variations de f sur $[1\,;+\infty[$.

   $d/$ Montrer que la droite $\Delta: y=x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3) Tracer $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

4) Soit g la fonction définie par : $g(x)=-f(x)$.

   $a/$ Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ représentation graphique de g dans la repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   $b/$ Vérifier que l'ensemble $\Gamma=\mathscr{C}\cup\mathscr{C}'$ a pour équation : $x^2-y^2+2x-3=0$.

5) Soit $I(-1\,;\,0)$, on considère le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$, où $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$.

   $a/$ Soit M un point du plan, on désigne par $(x\,;\,y)$ les coordonnées de M selon le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et par $(X\,;\,Y)$ selon le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$.

   Exprimer x et y en fonction de X et Y.

   $b/$ Déterminer alors l'équation de courbe Γ dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$.

Exercice n°2 : (5,5 pts)

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   $a/$ Montrer que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{x(x^2+2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

   $b/$ Dresser le tableau de variations de f.

   $c/$ Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)-x=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}$.

En déduire que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$.

$d/$ Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$.

2) Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation : $y = x^2$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère le point M de $\mathscr{P}$ d'abscisse a, où a est un réel strictement positif.

On désigne par H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur $\left(O, \vec{i}\right)$ et sur $\left(O, \vec{j}\right)$.

$a/$ Ecrire, en fonction de a, une équation de la droite (HK).

$b/$ Soit E le projeté orthogonal de O sur (HK).

Montrer que E a pour coordonnées $\left(\dfrac{a^3}{a^2+1}\ ,\ \dfrac{a^2}{a^2+1}\right)$.

$c/$ Calculer, en fonction de a, la distance OE et montrer que $OE = f(a)$.

Exercice n°3 : *(7pts)*

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle tel que $AC = 2AB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par J le milieu de $[BC]$ et par D le symétrique de B par rapport à A.

1) $a/$ Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en I et B en C. Préciser son angle et construire son centre O.

$b/$ Montrer que $R(D) = A$.

$c/$ Déterminer $R \circ R(D)$, en déduire que O est le milieu de $[DI]$.

2) Soient $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$ et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre C et passant par O.

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se recoupent en E, soit F le point diamétralement opposé à E sur $\mathscr{C}'$.

$a/$ Déterminer, en justifiant, l'image de chacune des droites (BE) et (OE) par R.

$b/$ En déduire que : $R(E) = F$.

3) Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et O, on pose $M_1 = r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(M)$ et $N = t_{\overrightarrow{AI}}(M_1)$.

$a/$ Montrer que $AM = IN$ et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IN}}\right)$.

$b/$ En déduire que $R(M) = N$.

4) $a/$ Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}}\right) [2\pi]$.

$b/$ En déduire que les points C, M et N sont alignés.

Bonne chance