lycée Houmet Souk 1 Jerba Prof : Loukil Mohamed	Devoir de Contrôle N : 2 Durée : 2 Heures	3 Mathématique 13 Février 2013

EXERCICE N : 1 (6 points)

Déterminer la seule réponse correcte de chacune des propositions suivantes :

A) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin x}$.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

2) a) $\lim\limits_{x\to \pi^+} g(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to \pi^+} g(x) = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to \pi^+} g(x) = 0$

3) a) $g'(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ **b)** $g'(x) = tg(x)$ **c)** $g'(x) = -tg(x)$

B) Soit M le point de coordonnées polaires (r , θ) et dont l'affixe est $\dfrac{i\sqrt{3}-1}{1-i}$. Alors θ est égal à :

a) $\dfrac{5\pi}{12}$ **b)** $\dfrac{11\pi}{12}$ **c)** $-\dfrac{\pi}{12}$

C) Soit n un entier relatif , le nombre $(1+i)^n$ est imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 4k$ **b)** $n = 4k+2$ **c)** $n = 8k+2$ $(k \in \mathbb{Z})$

D) Si $|Z-i| = |Z+i|$ alors :

a) Z est imaginaire **b)** Z est un réel **c)** $Z = 0$

E) Soit la suite (U_n) définie et **positive** sur IN et vérifie pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} < \dfrac{1}{3} U_n$, alors :

a) (U_n) est croissante sur IN **b)** (U_n) est divergente **c)** (U_n) est convergente

F) Soit la suite (S_n) définie IN* par : $S_n = \dfrac{2}{n^2+1} + \dfrac{4}{n^2+1} + \dfrac{6}{n^2+1} + \ldots\ldots + \dfrac{2n}{n^2+1}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n =$

a) 1 **b)** 0 **c)** $+\infty$

EXERCICE N : 2 (6 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2\,U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$

1) *Montrer que pour tout* $n \in IN$ *on a :* $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$.

2) a) *Montrer que la suite (U_n) est croissante sur IN .*

b) *Déduire que (U_n) est convergente .*

3) *On considère la suite (V_n) définie sur IN par :* $V_n = \dfrac{1+U_n}{1-U_n}$.

a) *Montrer que pour tout* $n \in IN$, $V_{n+1} = (V_n)^2$.

b) *Montrer alors que pour tout* $n \in IN$, $V_n = 3^{2^n}$.

c) *Exprimer* U_n *en fonction de n puis déterminer* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N : 3 (8 points)

A) *On considère dans □ l'équation* **(** E_θ **)** : $Z^2 + 4Z\cos(\theta) + 4 = 0$ *où* $\theta \in]0, \pi[$.

1) *Sans résoudre l'équation* **(** E_θ **)** *, prouver que si* **a** *est une solution de* **(**E_θ**)** *alors* $\bar{a}$ *l'est aussi .*

2) *On donne :* $Z_1 = -2\cos(\theta) + i\,2\sin(\theta)$ *et* $Z_2 = -2\cos(\theta) - i\,2\sin(\theta)$.

a) *Vérifier que* Z_1 *et* Z_2 *sont des solutions de (* E_θ *) .*

b) *Ecrire* Z_1 , Z_2 *et* $\dfrac{Z_2}{Z_1}$ *sous la forme trigonométrique .*

c) *Déduire la valeur de* θ *pour laquelle le triangle* OM_1M_2 *est rectangle en O .*

B) *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (* $O, \vec{u}, \vec{v}$ *).* ***On prend pour la suite*** $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

On considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_0 = 2$ *et* Z_1 *et K le milieu du segment [AB].*

1) *Ecrire* Z_1 *et* Z_K *sous forme cartésienne .*

2) *Ecrire* Z_1 *sous la forme trigonométrique .*

3) *Placer les points A , B et K .*

4) a) *Démontrer que le triangle OAB est isocèle .*

b) *Déduire que* $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OK}}) \equiv \dfrac{3\pi}{8} (2\pi)$.

c) *Donner alors les valeurs exactes de* $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.