

Exercice n° 1: (6 points)

- 1) Soit a et b deux entiers naturels .
 - a) i) Prouver que $10a+b$ est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13 .
 - ii) Sans calculatrice , montrer que 569556 est divisible par 13 .
- b) Si a et b sont premiers entre eux, montrer que $(2a+b)\wedge(3a+2b)=1$.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 .
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $(1 + i\sqrt{3})^n$ est réel alors n est divisible par 3 .

Exercice n° 2: (8 points)

- 1) Dans un repère orthonormé , soit M un point d'affixe z tel que $z \neq -3i$ et M' un point d'affixe $z' = \frac{i(z-1)}{z+3i}$
 - a) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.
 - b) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel .
- 2) Dans un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , soit A le point d'affixe $z_A = 2(\cos(\frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{12}))$ et B le point d'affixe z_B tel que OAB est un triangle équilatéral et $(\widehat{OA, OB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
 - a) Placer les points A et B dans (O, \vec{u}, \vec{v}) . Déduire le module et un argument de z_B .
 - b) Soit I le milieu du segment $[OB]$ et J le point d'affixe z_J tel que ABIJ est un parallélogramme .
 - i) Etablir que $z_A - z_J = \frac{z_B}{2}$ puis que $z_J = \frac{z_B}{2} (\frac{z_A}{z_B} - 1)$ et que $\frac{z_J}{z_A - z_J} = -i\sqrt{3}$.
 - ii) Montrer que AIOJ est un rectangle . En déduire le module et un argument de z_J .

Exercice n° 3: (6 points)

Le plan est orienté dans le sens direct . Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et I le symétrique de B par rapport à (AC) . Soit R la rotation qui transforme A en C .

- 1) Montrer que I est le centre de R .
- 2) Soit D = R (B) . Montrer que C est le milieu de $[AD]$.
- 3) A tout point M de $[AB]$ distinct de A et de B , on associe le point M' de $[CD]$ tel que $AM = CM'$.
Montrer que le triangle IMM' est équilatéral .

Bon travail