Prof : Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. (Systèmes)

Exo. : **(Enoncé)**

On donne les matrices : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&5\\5&6&8\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-2&1\\9&3&-3\\-8&-1&2\end{pmatrix}$

1°/ a / Calculer le déterminant de A

b / En déduire que A est inversible.

2°/ a / Calculer $A\times B$

b / En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

3°/ On considère le système linéaire suivant : $(S):\begin{cases}x+y+z & =400\\ 2x+4y+5z & =1420\\ 5x+6y+8z & =2460\end{cases}$

a / Donner l'écriture matricielle du système .

b / En déduire la résolution, dans $\mathbb{R}^3$, du système (S)

Exo. : **(Solution)**

1°/ a / $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&5\\5&6&8\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4&5\\6&8\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\6&8\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&1\\4&5\end{vmatrix}$

$=1\times(32-30)-2\times(8-6)+5\times(5-4)=2-4+5=3$

On peut aussi calculer le déterminant de A comme suit : $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&5\\5&6&8\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&4\\5&6\end{matrix}$

$=[1\times4\times8+1\times5\times5+1\times2\times6]-[5\times4\times1+6\times5\times1+8\times2\times1]=(32+25+12)-(20+30+16)=3$

On a : $\det(A)=3\neq0$ donc A est inversible .

b / $A\times B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&5\\5&6&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&-2&1\\9&3&-3\\-8&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

d'où : $A\times B=3\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3\,I_3$ donc A est inversible et on a :

$$A^{-1}=\frac{1}{3}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\9&3&-3\\-8&-1&2\end{pmatrix}$$

FATNASSI BECHIR

2°/ a / Le système $(S):\begin{cases} x+y+z = 400 \\ 2x+4y+5z = 1420 \\ 5x+6y+8z = 2460 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $A.X = C$: **Écriture matricielle de** (S)

Avec A la matrice du système ; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des inconnues

et $C = \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix}$ est la matrice colonne du second membre ou des constantes

b / Résolution du système :

$$A\,.\,X = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 800 - 2840 + 2460 \\ 3600 + 4260 - 7380 \\ -3200 - 1420 + 4920 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 420 \\ 480 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \\ 100 \end{pmatrix}$$

__**Donc**__ **:** $S_{\mathbb{R}^3} = \{(140\,,160\,,100)\}$

FATNASSI BECHIR