Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,; 2]$. Montrer que si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$.

2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

   a) Construire la fonction f sur l'intervalle $[0\,; 2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et
   $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

   d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
   Déterminer la valeur exacte de α.

Soit al suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1) a) Prouver que (u_n) est majorée par 4.
   b) Prouver que (u_n) est strictement croissante.
   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite

2) a) Prouver que pour tout n on a : $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$
   b) retrouver le résultat du 1c)
   c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^2(4 - u_n)$

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1) Démontrer par récurrence que :

   a) pour tout n, $u_n \geqslant 0$ b) Pour tout n : $u_n < 1$

2) Démontrer que la suite u_n est monotone et convergente.
3) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
4) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n et trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5) Trouver un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$: $u_n > 0,99$

---

1) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes puis trouver leur limite commune.
2) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. Donneralors une approximation de leur limite à 10^{-2}.
3) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. Donneralors une approximation de leur limite à 10^{-2}.
4) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par $u_0 = 0$, et $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$$

   a) Démontrer par récurrence que : $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$
   b) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et trouver leur limite commune.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1) Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3) Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4) On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante. En déduire la limte des suite (u_n) et v_n).

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

   a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3) Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

   a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

   b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\,;\,2]$ alors $f(x) \in [1\,;\,2]$.

2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

   a) Construire la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1) Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2) En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

On considère la suite définie par : $u_0=0$ et pour tout entier n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1° a) A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.

b) Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2°) On considère la fonction définie pour $x\in[0;3]$ par : $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;3]$ et dresser son tableau de variations. Préciser les valeurs de de la fonction aux bornes de cet intervalle.

c) Démontrer que : [si $x\in[0;3]$ alors $f(x)\in[0;3]$].

d) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $0\leqslant u_n\leqslant 3$

e) Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.

f) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

g) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$.

1) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

a) (u_n) est –elle strictement croissante; strictement décroissante ? Justifier.

b) (u_n) est-elle minorée; majorée ?Si oui, donner un minorant (resp. un majorant) le plus précis possible.

2) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = 1$.

a) Cette suite semble-t-elle majorée; minorée; monotone ?

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$.

c) Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^{\,2} + 8}.$$

1) On pose $v_n = u_n^{\,2} - 16$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa limite ?

2) Démontrer que, pour tout entier n, $|u_n - 4| \leqslant \frac{|v_n|}{4}$.
En déduire la limite de u_n.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n .$$

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n=u_{n+1}-u_n$ et $w_n=u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n=\frac{3}{5}(w_n-v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.