Séries d'exercices *4ème économie*
LIMITES ET CONTINUITE

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

EXERCICE N°1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-x+x^2}{1+x-2x^2}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2\pi x-1}{3x-2}\right)$; , $\lim\limits_{x\to0}x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2\right)$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur [2 ; + ∞ [par : $f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$.

Montrer que , pour tout $x\geq2$, $|f(x)-3|\leq\dfrac{4}{x-1}$. *En déduire la limite de f en + ∞*

EXERCICE N°3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos x}$.

1°)) Montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{1}{3}\leq f(x)\leq1$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(2-\cos x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{2-\cos x}$ *et* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2(2-\cos x)}$

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\dfrac{-x+\cos x}{2x+1}$

1°)Démontrer que pour tout $x>-\dfrac{1}{2}$ *on a :* $\dfrac{-x-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\dfrac{-x+1}{2x+1}$

2°) En déduire la limite de f en + ∞.

EXERCICE N°5

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur R par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{a-x}{x+1} & \text{si } x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[\\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+b & \text{si } x\in[-2;1] \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur R.

EXERCICE N°6

Soit f définie par $f(x)=\dfrac{ax^2+(a^2-3)x-3a}{x-1}$ *si* $x\neq1$ *et* $f(1)=4a$

Déterminer a pour que f soit continue en 1 .

EXERCICE N°7

Soit $f(x)=\dfrac{-x^2-3x-2}{1-|x+1|}$

1°)Déterminer le domaine de définition de f .
2°)Ecrire f sans valeur absolue.
3°)f est-elle continue en -1 .

EXERCICE N°8

Soit la fonction $f:x\mapsto3x+2\sin x$

1°)a-Montrer que pour tout x de R : $3x-2\leq f(x)\leq3x+2$

b-En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2°)Soit la fonction g défini sur R par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{f(x)} & si \quad x\neq 0\\ \dfrac{1}{5} & si \quad x=0\end{cases}$

a- Montrer que g est continue en 0.

b- Montrer que pour tout $x\in\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$: $\dfrac{x}{3x+2}\leq g(x)\leq\dfrac{x}{3x-2}$

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interprète géométriquement le résultat.

EXERCICE N°9

Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si \quad x\neq 0\\ a \quad si \quad x=0\end{cases}$ où $a\in R$

1°)Déterminer le domaine de définition de f .
2°)Pour quelle valeur de a, f est continue en 0 .
3°)Préciser suivant a, l'ensemble de continuité de f
4°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.f(x)+1-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}.f(x)$

EXERCICE N°10

Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2x-3} & si \quad x\leq 1\\ \dfrac{2m-x}{2-x} & si \quad 1<x\leq\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{x^2+1}{x^2+2x-4} & si \quad x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$

1°)Trouver m pour que f soit continue en 1 .
2°)Pour la valeur du réel m trouvée. Etudier la continuité da f en $x_0=3/2$.

EXERCICE N°11

$f(x)=\begin{cases}(1+3a)x^2-3x & si \quad x\in\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\\ \dfrac{x^3-8}{2x^2-5x+2} & si \quad x\in\left]\dfrac{1}{2},2\right[\\ \sqrt{4x^2-1}-ax-1 & si \quad x\in[2,+\infty[\end{cases}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .
2°)Etudier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

3°)Peut-on déterminer a pour que f soit continue en 2 .
4°)Préciser suivant a, l'ensemble de continuité de f .

EXERCICE N°12

1°)Démontrer que l'équation : $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]1;2\right[$

2°)Utiliser la dichotomie pour donner une valeur approchée par défaut de cette α à 10^{-1} près .

EXERCICE N°13

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[0,a]$ par :

Pour tout $x\in[0,a]$, $f_a(x)=\dfrac{a-x}{a(a+x)}$.

1°) Montrer que f_a réalise une bijection de $[0;a]$ sur $[0;\dfrac{1}{a}]$. On note f_a^{-1} sa bijection réciproque.

2°) Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.

3°) Montrer que $f_a^{-1}=f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE N°14

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par* $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x+1$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,+\infty[$

2°)Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

3°)Sur quel ensemble f^{-1} *est-elle continue ?*

4°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$

5°)Montrer que l'équation $f(x)=x+2$ *admet une solution unique* $\alpha \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$

EXERCICE N°15

Soit $f : x \mapsto f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

1°)Déterminer le domaine de définition D_f *de f.*

2°)Etudier la dérivabilité de f sur D_f .

3°)Montrer que f est une bijection de $[0,1[$ *sur un intervalle J que l'on précisera*

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$