Exo. n°4 : **(Enoncé)**

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

1°/ a / Calculer A^2

b / Montrer que $A^2+A-2I_3=\theta$; I_3 est la matrice unité d'ordre 3 et θ la matrice nulle

c / En déduire que A est inversible et donner son inverse A^{-1}

2°/ On considère le le système $(S):\begin{cases}-x+y+z=2\\ x-y+z\ =0\\ x+y-z\ =4\end{cases}$ où x , y et z sont des inconnues réelles

a / Donner l'écriture matricielle de (S)

b / Résoudre alors , dans $\mathbb{R}^3$, le système (S)

Exo. n°4 : **(Solution)**

1°/ a / $A^2=A\times A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1+1 & -1-1+1 & -1+1-1\\ -1-1+1 & 1+1+1 & 1-1-1\\ -1+1-1 & 1-1-1 & 1+1+1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

b / $A^2+A-2I_3=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\theta$

c / $A^2+A-2I=\theta\Leftrightarrow 2I_3=A^2+A=A(A+I_3)\Leftrightarrow I_3=\frac{1}{2}A(A+I_3)=A\left[\frac{1}{2}(A+I_3)\right]$

Donc A est inversible et on a : $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

2°/ a / Le système $(S):\begin{cases}-x+y+z=2\\ x-y+z\ =0\\ x+y-z\ =4\end{cases}$ est équivalent à $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $A.X=C$: **Écriture matricielle de** (S)

Avec A la matrice du système ; $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ est la matrice colonne des inconnues

et $C=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$ est la matrice colonne du second membre ou des constantes

b / Résolution du système :

$$A.X=C\ \Leftrightarrow\ X=A^{-1}\times C\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0+0+4\\ 2+0+4\\ 2+0+0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\ 6\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}^3}=\{(2\ ,3\ ,1)\}$

Devoirat