

Mr : Mhamdi Fethi

Devoir de synthèse n°1

Mathématique

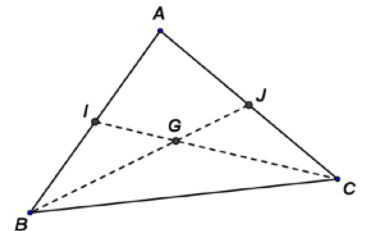
Classe : 2^{ème} Science

Noté Bien: la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prisent en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 (3 points)

Indiquer, sans justification, la réponse exacte.

- 1) Soit a un entier naturel tel que a divise 11 et divise 9, alors a divise :
29 28 30
- 2) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r tel que $U_3 = -3$ et $U_{15} = 21$, alors $r =$
1 2 3
- 3) Dans la figure ci-contre, I et J sont respectivement les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.
L'application du plan dans lui-même qui transforme I en C et J en B est :
 S_G $h_{(G, \frac{2}{3})}$ $h_{(G, \frac{-2}{3})}$



Exercice n°2 (6 points)

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par :
$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{2n} U_n \end{cases}$$

- 1) a) Calculer U_2 et U_3
b) En déduire que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ *
c) Comparer alors : U_{10^3-1} et U_{10^3}

3) En utilisant la relation *montrer que : $(\frac{1}{2})^n \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

4) On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_1 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n en fonction de n .

c) En déduire que $U_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout entier naturel n non nul

5) Soit $S = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

a) Montrer que $S = 1 - \frac{1}{2^n}$

b) Déterminer n pour que : $S \geq \frac{31}{32}$

Exercice n°3 (5 points)

Un entier est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (autre que lui-même).

Exemple : $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

1) Vérifier que 496 est un entier parfait

2) Soit p un nombre premier différent de 2, et soit $N = p \times 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par D_N l'ensemble des diviseurs de N et par S la somme des diviseurs de N .

a) Vérifier que : $D_N = \{2^k, 0 \leq k \leq n\} \cup \{p \times 2^k, 0 \leq k \leq n\}$

b) Montrer que : $S = (2^{n+1} - 1) + p(2^{n+1} - 1)$

c) En déduire que : $(N \text{ est un nombre parfait} \Leftrightarrow p = 2^{n+1} - 1)$

3) Application :

Ecrire le nombre 8128 sous la forme $p \times 2^n$ (p un nombre premier $\neq 2$ et $n \in \mathbb{N}$)

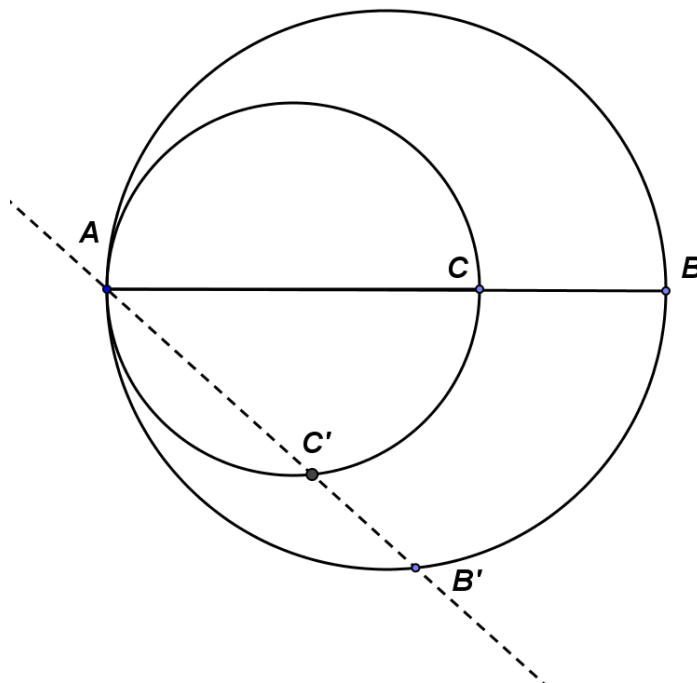
puis déduire qu'il est parfait

Exercice n°4 (6 points)

On considère un segment $[AB]$ de longueur 6 cm, le point C de $[AB]$ tel que $AC = 4$ cm et les cercles (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$ et (\mathcal{C}') de diamètre $[AC]$. Soit Δ une droite variable passant par A et distincte de (AB) qui recoupe (\mathcal{C}) en B' et (\mathcal{C}') en C' . (voir figure)

1) Montrer que $(BB') \parallel (CC')$

- 2) Soit h l'homothétie de centre A et tel que $h(B) = C$
- Déterminer le rapport de h
 - Déterminer l'image de B' par h
- 3) Soit $I = (BC') \cap (CB')$ et h' l'homothétie de centre I et tel que $h'(B) = C'$
- Déterminer $h'(B')$
 - Déterminer le rapport de h'
- 4) a) Montrer que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB'}$
- Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque Δ varie



Bon travail