Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de Synthèse n° 1** Mathématiques	Niveau : $2^{\text{ème}}$ Sc_{1+3+4} et $2^{\text{ème}}$ Info
Date : 04 /12 / 2012	Profs :Mrs Zaouali M et Meddeb T	Durée : 2 heures

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (4 pts)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, et l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note sera ramenée à zéro.

1) Le polynôme P défini par : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ est factorisable par :

   $a/\ x^2 - 1$ $\qquad b/\ x - 2$ $\qquad c/\ x^2 + x - 2$.

2) L'ensemble de solutions de l'équation : $2x^2 + \left(6 - \sqrt{2}\right)x - 3\sqrt{2} = 0$ est :

   $a/\ S_{IR} = \left\{-\sqrt{2}\,;\,\frac{3}{2}\right\}$ $\qquad b/\ S_{IR} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,3\right\}$ $\qquad c/\ S_{IR} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-3\right\}$.

3) Soient A, B et C trois points du plan et α est un réel.

   Le barycentre G des points pondérés $(A\,,1), (B\,,\alpha)$ et $(C\,,\alpha^2 - 3)$ existe si, et seulement si :

   $a/\ \alpha \neq 1$ $\qquad b/\ \alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -2$ $\qquad c/\ \alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$.

4) $MNPQ$ est un parallélogramme si, et seulement si, Q est le barycentre des points pondérés :

   $a/\ (M\,,1), (N\,,1)$ et $(P\,,-1)$.

   $b/\ (M\,,1), (N\,,-1)$ et $(P\,,1)$.

   $c/\ (M\,,-1), (N\,,1)$ et $(P\,,1)$.

Exercice n°2 : (8 pts)

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 4$.

1) $a/$ Vérifier que (-1) est une racine de P.

   $b/$ Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$ pour tout $x \in IR$.

2) Résoudre dans IR l'inéquation: $P(x) \geq 0$.

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x - 2}{P(x)}$.

   $a/$ Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.

$b/$ Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

$c/$ Résoudre dans IR l'inéquation : $f(x) \leq \dfrac{2}{x+2}$.

4) $a/$ Trouver les réels a et b tels que, $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ pour tout $x \in D$.

$b/$ Calculer alors la somme :

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{5\times 6} + \frac{1}{6\times 7} + \frac{1}{7\times 8} + \frac{1}{8\times 9} + \frac{1}{9\times 10}.$$

Exercice n°3 : (8 pts)

Soit ABC un triangle, I et J sont les points définis par :

- $\overrightarrow{AI} = 3\,\overrightarrow{AB}$.
- J est le barycentre des points pondérés $(B,1), (C,2)$.

1) $a/$ Construire les points I et J.

$b/$ Exprimer I comme barycentre de A et B.

2) Soit G le barycentre des points pondérés $(I,1), (C,6)$.

$a/$ Montrer que : $-2\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} + 6\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$b/$ Montrer que les points A, J et G sont alignés.

$c/$ Construire alors le point G.

3) Soit K le point défini par : $\overrightarrow{BK} = \dfrac{7}{4}\overrightarrow{BG}$.

$a/$ Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(B,3), (K,4)$.

$b/$ Soit H le le barycentre des points pondérés $(A,-1), (C,3)$.

Montrer que $K = H$, puis construire le point K.

4) Pour tout point M du plan, on pose : $\vec{w} = -\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC}$.

$a/$ Montrer que : $\vec{w} = -\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$.

$b/$ On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble de points M du plan tels que :

$$\left\| -2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} + 6\,\overrightarrow{MC} \right\| = \frac{7}{2}\left\| \vec{w} \right\|.$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre G et de rayon BK.

Bonne chance