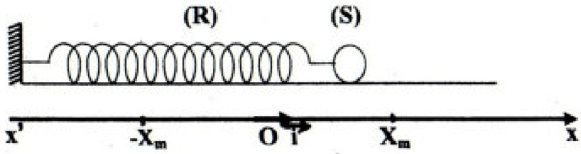
Série Physique 4ème Sc / Math

Oscillations mécaniques libres (Amorties et non amorties)

Exercice 1 :

Un solide ponctuel (S), de masse m, est attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R), à spires non jointives, de raideur K et de masse négligeable.



L'autre extrémité du ressort est fixe. (S) se déplace sans frottement sur un banc à coussin d'air horizontal. Sa position est repérée par l'abscisse x dans le repère (O ; $\vec{i}$) avec O est la position du centre d'inertie G lorsque (S) est en équilibre.

A t=0s, on écarte (S) de sa position d'équilibre en le déplaçant dans le sens positif des élongations puis on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale.

1) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de l'élongation $x(t)$.
2) La variation de l'élongation $x(t)$ du solide (S) au cours du temps est donnée par la **figure-1-**.
   a- Déterminer l'amplitude X_m ; la période propre T_0 et la pulsation propre ω_0 du mouvement.
   b- Déterminer la phase initiale φ_x du mouvement.
   c- Ecrire l'équation horaire $x(t)$ du mouvement.
   d- Déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ du solide (S) au cours du temps.

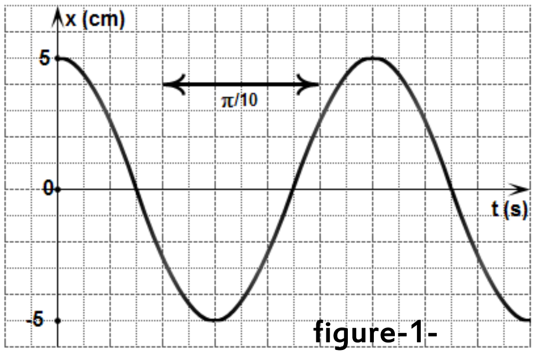


figure-1-

3) a- Exprimer l'énergie mécanique E du système {(S) ; (R)}, à une date t, en fonction de K; x; m et v.
   b- Montrer que le système {(S) ; (R)} est conservatif. Donner l'expression de E en fonction de K et X_m.
4) a- Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c en fonction de x^2.
   b- La courbe de la **figure-2-** représente la variation de l'énergie cinétique E_c du système {(S) ; (R)} en fonction de x^2 ($E_c=f(x^2)$)
   En exploitant cette courbe, déterminer la valeur de la constante de raideur K du ressort (R).
   c- Déduire la valeur de la masse m du solide (S).

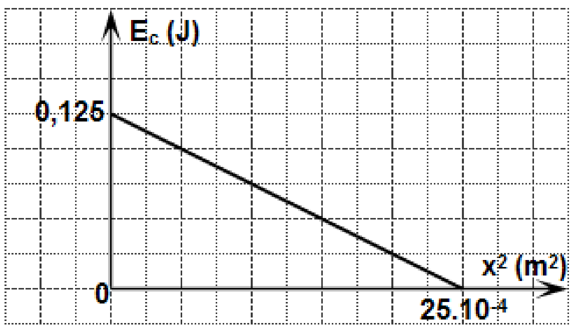


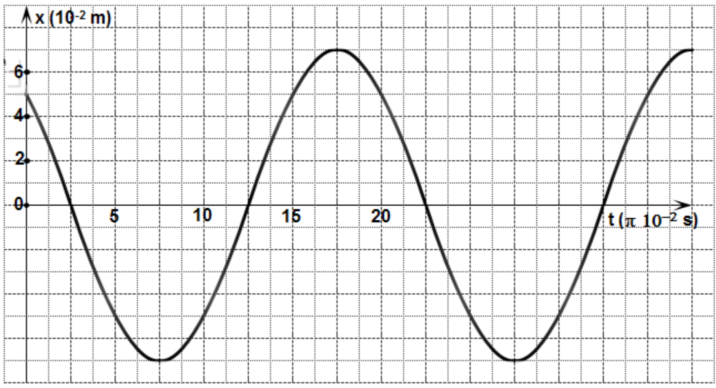
figure-2-

5) Dans cette partie, le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive d'amortissement.
   a- Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'élongation $x(t)$ du mouvement du solide (S).
   b- Montrer que l'énergie mécanique E de l'oscillateur diminue au cours du mouvement de (S).
   c- Représenter l'allure de la courbe $x = f(t)$ et donner le nom du régime correspondant dans les deux cas suivants :
   - 1er cas : h est très grande.
   - 2ème cas : h est faible.

Exercice 2 :

Un pendule élastique est formé d'un solide (S) de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort (R) de constante de raideur K. Le pendule est placé sur un plan horizontal parfaitement lisse.

1) La position d'équilibre est prise comme origine du repère d'espace. Le solide (S) est écarté de cette position dans le sens positif de x_0 et on lui communique à l'instant t_0 = 0s une vitesse $\vec{v}_0$ colinéaire à $\vec{i}$.
   - a- Exprimer l'énergie mécanique du système $\{S, R\}$ en un point quelconque M d'abscisse x.
   - b- Le système est-il conservatif ? Justifier.
   - c- Déduire la nature du mouvement de (S).
2) On donne la courbe de variation de l'abscisse x de (S) au cours de son mouvement.



   - a- Déterminer l'équation horaire $x(t)$ de (S).
   - b- Calculer l'abscisse x_0 de (S).
   - c- Ecrire l'équation de la vitesse $v(t)$ de (S). Déduire la valeur algébrique v_0 de sa vitesse initiale.
3) Sachant que l'énergie mécanique du système est E = 74.10^{-3} J.
   - a- Donner l'expression de E en fonction de X_m, déduire K.
   - b- Calculer alors la masse **m**.
4) Représenter sur le même système d'axes les courbes de variations de l'énergie : mécanique E, cinétique E_c et potentielle E_p du système en fonction du carré de son abscisse dans un domaine que l'on définira.

Exercice 3 :

Un solide de centre d'inertie G, a une masse **m**. Il peut coulisser sans frottement le long d'une tige horizontale.

Ce solide est attaché à un ressort de masse négligeable et de constante de raideur K = 80 N.m^{-1}.

1) a- Faire le bilan des forces appliquées au solide à un instant t. Les représenter sur un schéma.
   - b- Etablir l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G vérifié par x.
   - c- Déterminer l'expression de la période propre T_0 pour que la solution de l'équation différentielle soit : $x(t) = X_m sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_x\right)$.
   - d- L'enregistrement de l'élongation de G en fonction du temps est donné par la **figure-3-**. Déterminer l'expression de $x(t)$.

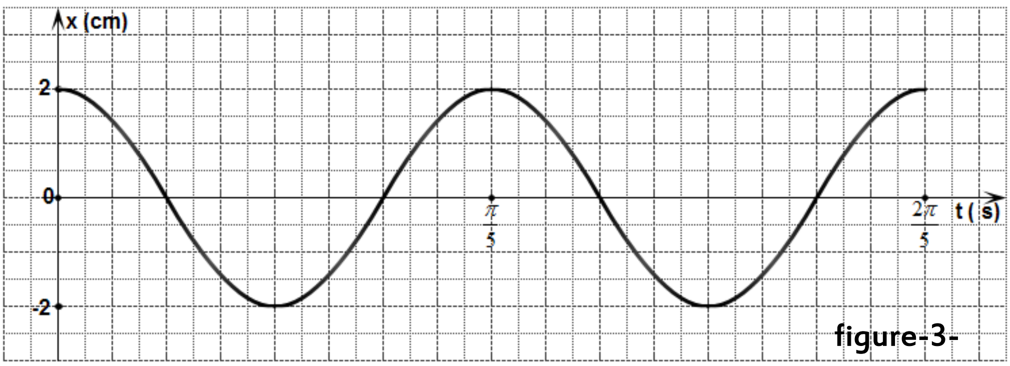


figure-3-

e- Déterminer la valeur algébrique de la vitesse V lorsque G passe pour la troisième fois par la position d'abscisse x = 1 cm.

f- Donner les expressions de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_{pe} du système $\{$**solide + ressort**$\}$ en fonction de x. Montrer que l'énergie totale se conserve.

g- Chercher les abscisses pour les duelles $E_c = E_{pe}$.

2) Le graphe de la **figure-4-** représente l'accélération a en fonction de x.

a- Montrer que l'allure de ce graphe est en accord avec l'équation différentielle précédente.

b- En déduire m.

3) En réalité l'enregistrement de l'élongation de G en fonction du temps a donné le graphe de la **figure-5-**.

a- Justifier que l'oscillateur subit une force de frottement.

b- Montrer que l'énergie de l'oscillateur diminue au cours du temps.

c- Calculer la variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur entre les instants de dates t_1=0 et t_2=2T.

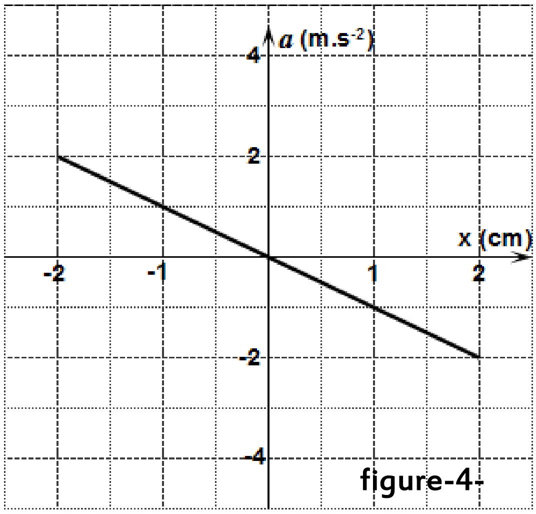


figure-4-

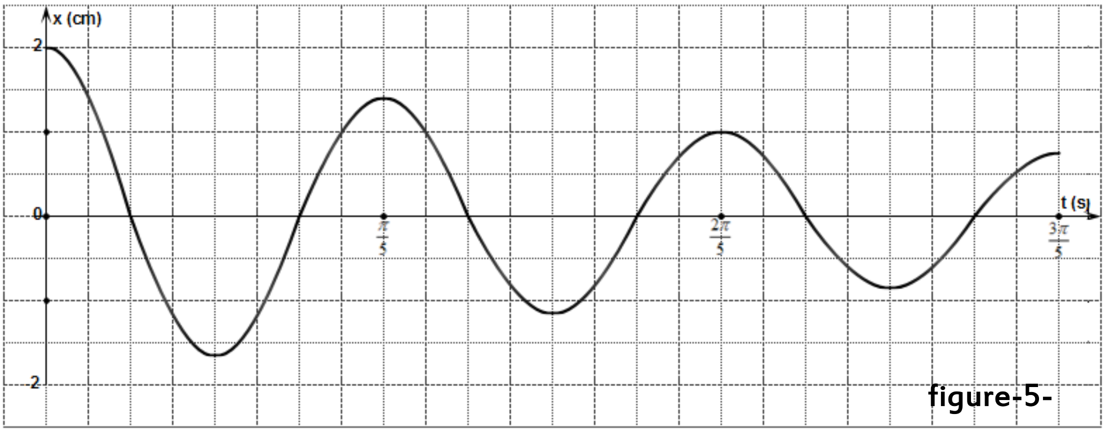
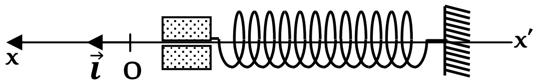


figure-5-

Exercice 4 :

Un pendule élastique disposé horizontal comme l'indique la figure ci-contre est formé par un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K, dont l'autre extrémité est fixe, et un solide (S) supposé ponctuel de masse m attaché à l'autre extrémité.



Au cours de son mouvement, le solide (S) se déplace le long d'un axe (x'x) horizontal muni du repère $\mathcal{R}(O, i)$. Au repos, le centre d'inertie G de (S) occupe la position O et son élongation est, à chaque instant, donnée par $x(t) = \overline{OG}$.

Partie A :

On écarte (S) de sa position de repos. Quand la valeur algébrique de la tension du ressort prend la valeur T_i = -2,56 N, on le lâche à lui-même à un instant pris comme origine des temps.

1) Soit T la valeur algébrique de la tension $\vec{T}$ du ressort. Montrer que la variation de T est, au cours du temps, régit par l'équation différentielle : $\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{K}{m}T = 0$.
En déduire que le centre d'inertie G effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal par rapport au repère $\mathcal{R}(O, i)$, de période propre T_0 qu'en exprimera en fonction de K et m.

2) Un dispositif d'enregistrement des oscillations de (S) permet d'obtenir le diagramme de la **figure-6-** qui correspond aux variations de l'élongation $x(t)$ en accord avec l'équation : $x(t) = X_{max}sin(2\pi N_0 t + \varphi_x)$.

   a- En se servant de la courbe de variation de l'élongation x en fonction du temps, déterminer X_{max}, N_0 et φ_x.

   b- Montrer que K = 64 N.m^{-1}. En déduire la valeur de **m** et celle de l'énergie potentielle élastique Ep emmagasinée par le ressort à l'origine des temps.

   c- Donner l'expression $T(t)$ valeur instantanée de la tension du ressort et représenter ses variations dans l'intervalle compris entre 0 et 2,5T$_0$.

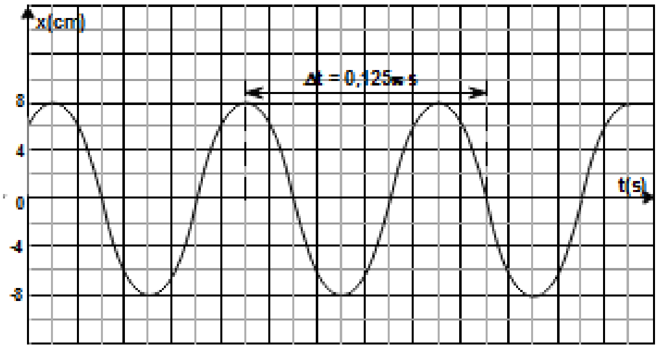


figure-6-

3) a- Etablir que, à une date quelconque, l'énergie mécanique E de ce pendule peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{m}{2.K^2}\left\{\omega_0^2 T^2(t) + \left(\frac{dT}{dt}\right)^2\right\}$$ avec ω_0 la pulsation propres des oscillations mécaniques.

   b- Montrer que l'énergie mécanique de ce pendule se conserve. En déduire sa valeur.

Partie B :

En réalité, le solide (S) est, au cours de son mouvement, soumis à des forces de frottements de type visqueux équivalent à une force $\vec{f}$ de valeur algébrique $f = -h.v$ avec v la vitesse de (S) et h le coefficient de frottement.

1) Exprimer f en fonction de h, K et $\frac{dT}{dt}$ puis établir l'équation différentielle qui régit les variations de T aux cours du temps.

2) A l'aide d'un système d'acquisition de données et un logiciel approprié, un ordinateur affiche sur son écran le graphe de la **figure-7-** représentant les variations de x au cours du temps.

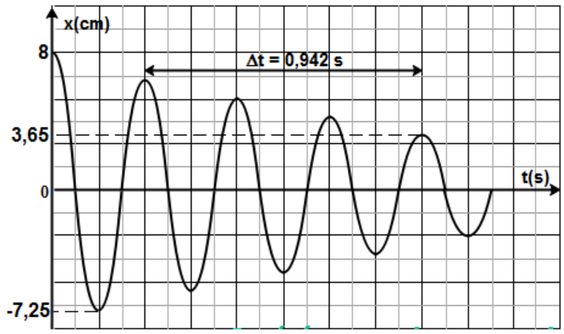


figure-7-

   a- Quel régime d'oscillation mécanique montre le graphe de la **figure-7-** ? Justifier la réponse.

   b- Expliquer la diminution graduelle de l'énergie mécanique de ce pendule. Sous quelle forme cette énergie est dissipée ?

   c- Déterminer la valeur moyenne de la pseudo période T'.

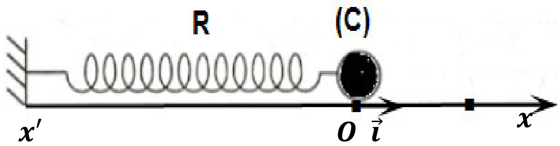
3) Calculer la perte d'énergie mécanique entre les dates 0,5T' et 4T'. Indiquer, en le justifiant, comment peut-on minimiser cette perte ?.

2/4

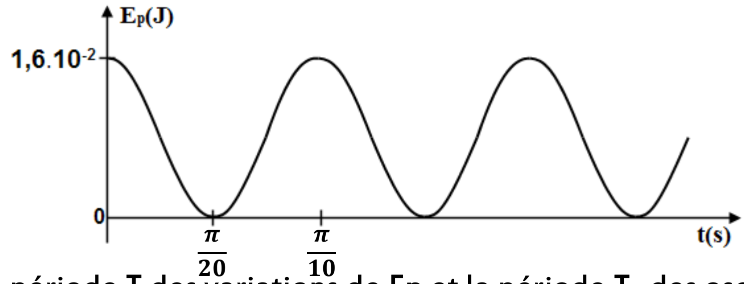
Exercice 5 :

A/ Les frottements sont supposés négligeables :

On considère l'oscillateur représenté ci-contre, formé par un ressort R de raideur K=20N.m^{-1} et un corps (C) supposé ponctuel de masse m=200g. On écarte le corps (C) de sa position d'équilibre O jusqu'à le point M$_0$ d'abscisse x_0 (x_0<0), puis on le libère à la date t$_0$=0s sans vitesse initiale.



1) Etablir l'équation différentielle du mouvement du corps (C) et en déduire la nature de son mouvement.
2) Calculer la période T_0 des oscillations de (C).
3) Exprimer l'énergie potentielle **Ep** du système $\{$**R, (C)**$\}$ en fonction du temps.
4) On donne la courbe **Ep** en fonction du temps.



a- Comparer la période T des variations de **Ep** et la période T_0 des oscillations de (C).

b- Déterminer l'amplitude X_m des oscillations de (C) et écrire l'équation horaire de son mouvement.

B/ Les frottements ne sont plus négligeables :

Dans cette partie le corps (C) est soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$. (h est une constante positive)

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement du corps (C).
2) Montrer que l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue au cours du mouvement de (C).
3) Sur **la figure-8-**, on a porté dans un ordre quelconque et à la même échelle **4** enregistrements mécaniques, traduisant les variations de $x(t)$, avec $h_1 < h_2 < h_3 < h_4$, ainsi qu'un tableau incomplète .

   Compléter le tableau, en précisera à quelle valeur h_i correspond au retour le plus rapide de (C) vers son état d'équilibre.

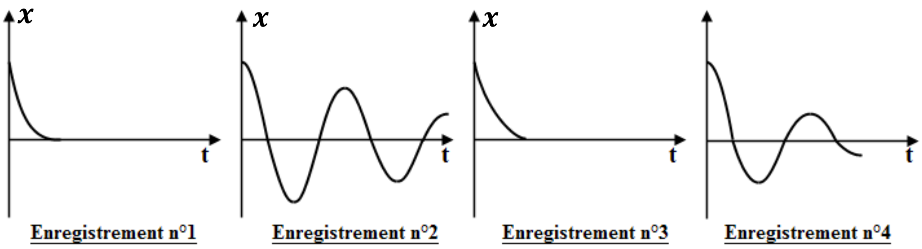


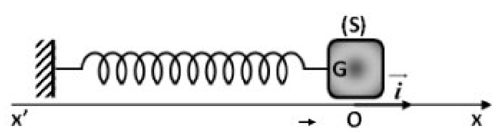
figure-8-

	h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$	*Nature du mouvement*
Enregistrement n°1		
Enregistrement n°2		
Enregistrement n°3		
Enregistrement n°4		

Exercice 6 :

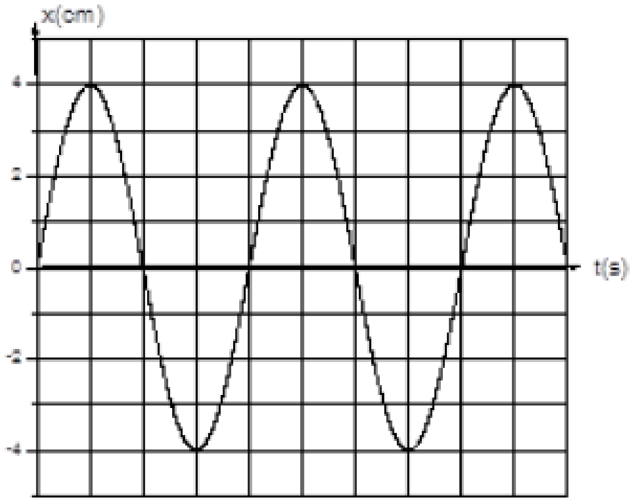
On étudie les oscillations mécaniques d'un pendule élastique horizontal en supposant tout type de frottement négligeable.

On désigne par $x(t)$ l'élongation du centre d'inertie G du solide dans le repère (O ; $\vec{\imath}$) où O est la position de G à l'équilibre.



1) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation $x(t)$.
2) La solution de cette équation différentielle est : $x(t) = X.sin(\omega_0 t + \varphi_x)$. En vérifiant cette solution, établir l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres du pendule en fonction de la masse **m** du solide et de la raideur **k** du ressort.

3) Dans une première expérience et à l'aide d'un système approprié on enregistre pendant une durée $\Delta t = 1,25$ s le mouvement du centre d'inertie G d'un solide (S_1) de masse m_1. On obtient le diagramme de la **figure-9-** ci-contre.



a- Déduire la période T_0 des oscillations.

b- Calculer :

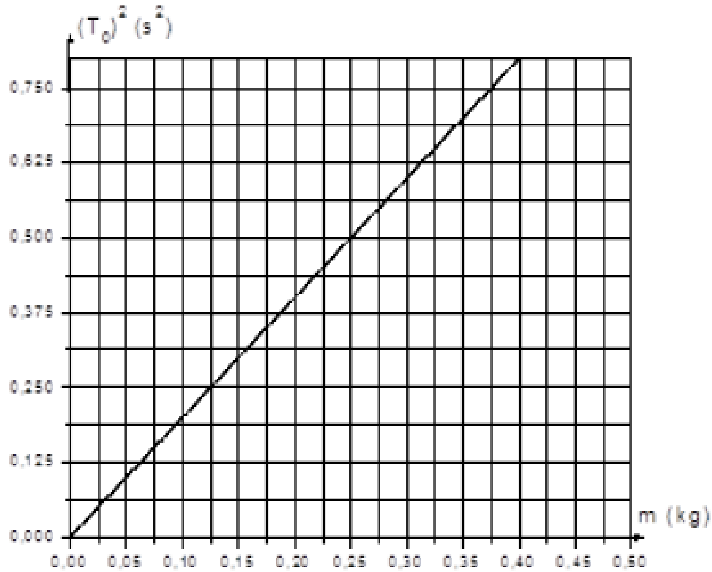
  i. La phase initiale φ_x du mouvement.

  ii. La vitesse initiale V_0 à la date **t = 0 s**.

c- Sous qu'elle forme se présente l'énergie mécanique du système {solide + ressort} à la date t=0 s ? Justifier la réponse.

4) Dans une deuxième expérience on étudie l'influence de la masse du solide sur la période T_0 des oscillations.

Pour différentes valeurs de la masse **m** on mesure la période T_0. Cette étude a permis de tracer la courbe de la **figure-10-** représentant $T_0^2 = f(m)$.



a- Déduire de la courbe de la **figure-10-** la masse m_1 du solide utilisé lors de la première expérience.

b- Calculer la raideur k du ressort.

c- Calculer l'énergie mécanique fournie initialement (à **t = 0**) au système **{(S_1) + ressort}**.

d- Calculer les abscisses des positions du centre d'inertie **G** de (S_1) pour lesquelles l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont égales.

5) Dans une troisième expérience et à l'aide d'un dispositif d'amortissement approprié on applique sur le solide de masse m_1 une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est un coefficient d'amortissement positif et $\vec{v}$ le vecteur vitesse instantanée du solide. Dans ces conditions l'équation différentielle reliant l'élongation $x(t)$ à ses dérivées première et seconde par rapport au temps s'écrit : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 12\frac{dx(t)}{dt} + 160x(t) = 0$

a- Déduire de cette équation la valeur du coefficient de frottement h.

b- Montrer que le système **{(S_1) + ressort}** n'est pas conservatif.

c- Les diagrammes ci-dessous sont des enregistrements de l'évolution temporelle de l'élongation $x(t)$ du centre d'inertie du solide pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement h.

Attribuer à chacun des enregistrements (1), (2) et (3) le coefficient d'amortissement correspondant parmi les valeurs h_a , h_b et h_c , et préciser pour chacun le nom du régime correspondant.