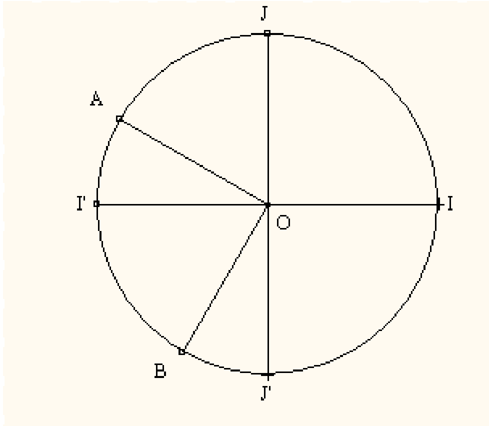
# Angles orientés

Novembre 2009
A. LAATAOUI

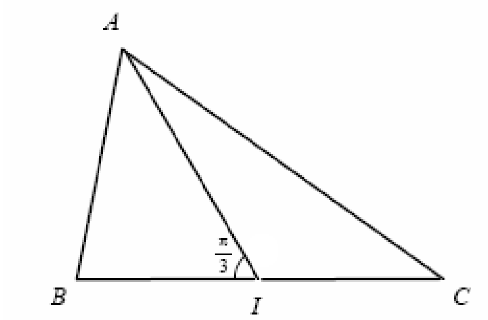
## Exercice n°1 :




Sur un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, on considère deux points A et B tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ'}\right)$, $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BO}\right)$, $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)$, $\left(2\overrightarrow{OA},-3\overrightarrow{OB}\right)$.

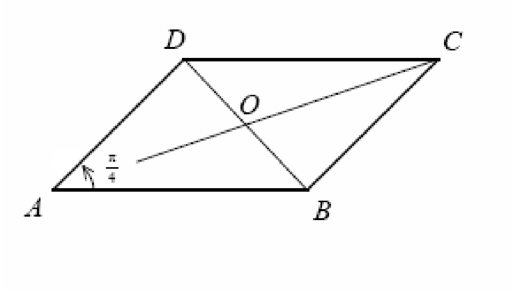
## Exercice n°2 :




ABC est un triangle et I le milieu de [BC]. On sait que : $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
$\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{IB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{IC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{CB}\right)$.

## Exercice n°3 : ©




Le plan étant orienté dan le sens direct.
ABCD est un parallélogramme de centre O.

1. Démontrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv 0[2\pi]$ .
2. Quelle propriété du parallélogramme a – t – on démontré ?
3. On suppose que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

   Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
   $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DA}\right)$, $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$.

## Exercice n°4 : ©

On considère dans le plan orienté , un triangle ABC isocèle de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [BC].

1. Donner la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.
2. a) Placer le point E de la droite (AI) tel que $\frac{7\pi}{2}$ soit une mesure de $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}\right)$

b) Déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)$. En déduire la nature du triangle BEC.

c) Donner en radian la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BE}\right)$, $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{EC}\right)$, $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BC}\right)$

## *Exercice n°5 :* ©

Etant donnés deux points A et B du plan orienté dans le sens direct tels que AB = 3 cm.

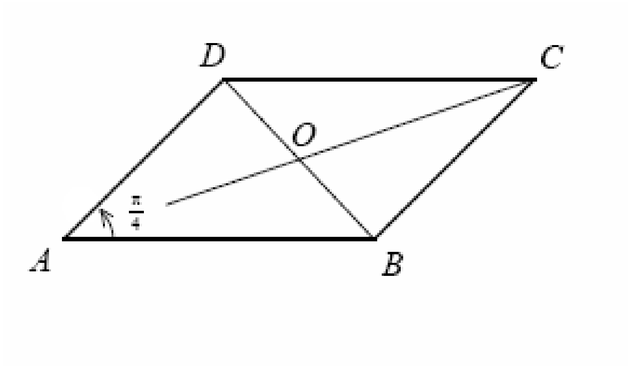
1. Déterminer et construire l'ensemble $C_1 = \left\{ M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\left[2\pi\right] \right\}$.
2. On désigne par $C_2 = \left\{ M \in P / \frac{MA}{MB} = 2 \right\}$.

   a) On note G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, - 4).

   Montrer que $C_2$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $MG^2 = \frac{1}{3}\left(GA^2 - 4GB^2\right)$.

   b) En déduire que $C_2$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3. Utiliser les résultats précédents pour construire le triangle ABC vérifiant : $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$ et $CA = 2CB$.

## Exercice n°3 :




1. $\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DC},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{CD},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{CD},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]\equiv 0[2\pi]$

2. D'après la question 1. On a : $\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{CD},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$

   Dans un parallélogramme, deux angles opposés sont isométriques.

3. $\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

   - $\left(\overrightarrow{CD},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{\pi}{4}\in\,]-\pi,\pi]\Rightarrow\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)$

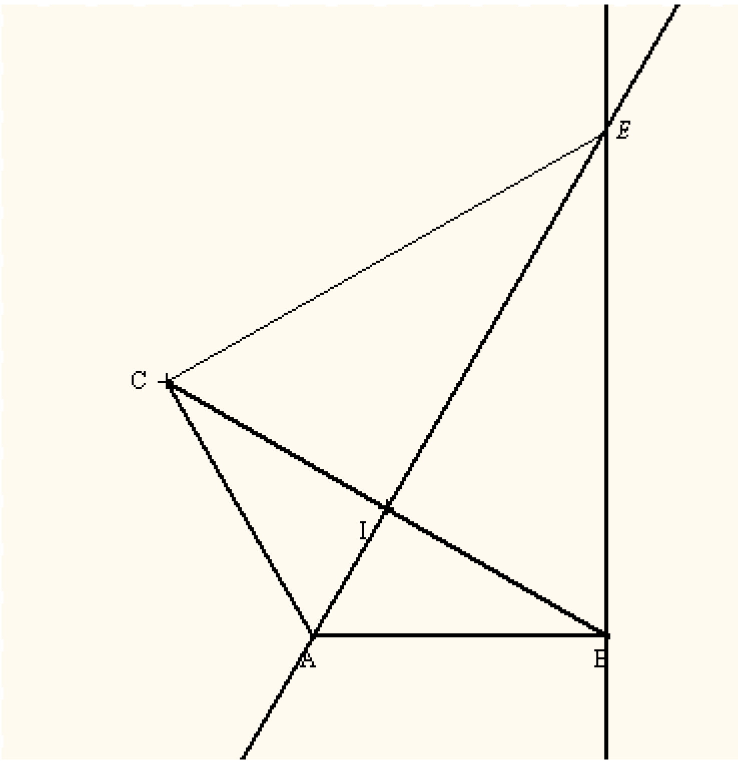
   - $\left(\overrightarrow{BA},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{DA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\Rightarrow\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DA}\right)$

   - $\left(\overrightarrow{DC},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{DA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{DA}\right)[2\pi]\equiv\pi+\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]\equiv\pi+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

     $-\frac{3\pi}{4}\in\,]-\pi,\pi]\Rightarrow-\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$

   - $\left(\overrightarrow{BC},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{DA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AD},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{DA}\right)[2\pi]\equiv\pi[2\pi]\Rightarrow\pi$ la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$

## Exercice n°4 :




1. La mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ :

Cherchons tout dabord la mesure de l'angle géométrique $A\hat{B}C = \dfrac{\pi - B\hat{A}C}{2} = \dfrac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ est orienté dans le sens négatif $\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

2. a) $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}}\right) \equiv \dfrac{7\pi}{2}[2\pi] \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et E $\in$ (AI).

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

E $\in$ (AI) = méd[BC] $\Rightarrow$ EB = EC, de plus $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow$ BEC est équilatéral.

c)

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}}\right) + \pi[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv -\frac{7\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{EC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC}}\right)[2\pi] \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}}\right)[2\pi] \equiv \pi - \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

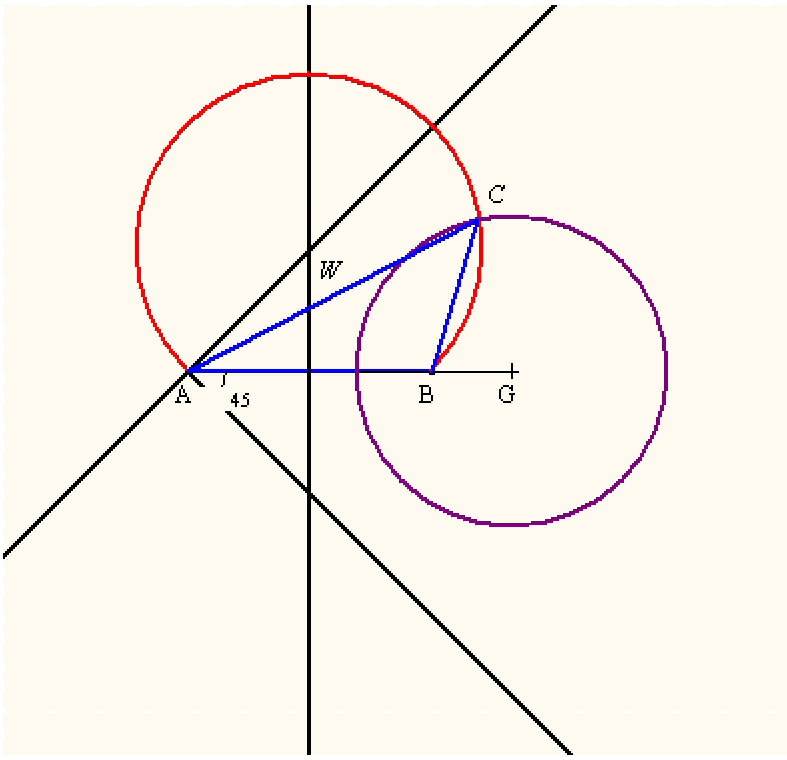
$$\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IC}}\right)[2\pi] \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}\right)[2\pi] \equiv \pi - \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

## *Exercice n°5 :*

1. $C_1 = \left\{ M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \right\}$

   $C_1$ est l'arc d'un cercle $\zeta$ passant par A et B et tangent à la demi-droite [At) telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{At}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

   Cet arc est situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas [At) et il est privé des points A et B.




2. $C_2 = \left\{ M \in P / \frac{MA}{MB} = 2 \right\}$

   a) G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -4).

   M $\in$ $C_2$ $\Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow$ MA = 2MB $\Leftrightarrow$ MA² - 4 MB² = 0 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 = 0$

   $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = 0$

   $\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 - 4MG^2 - 8\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} - 4GB^2 = 0$

   $\Leftrightarrow -3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left( \underbrace{\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}} \right) + GA^2 - 4GB^2 = 0$

   $\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}\left(GA^2 - 4GB^2\right)$.

   b) $\overrightarrow{AG} = \frac{-4}{1-4}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow GA = \frac{4}{3} \times AB = 4$

   $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1-4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow GB = \frac{1}{3} \times AB = 1$

   M $\in$ $C_2$ $\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}\left(GA^2 - 4GB^2\right) = \frac{1}{3}(16-4) = 4 \Leftrightarrow MG = 2 \Leftrightarrow M \in \zeta_{(G,2)}$

3. $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $CA = 2CB$ $\Leftrightarrow$ C $\in$ $C_1 \cap C_2$.