Prof :Oueslati Aymen /27677722 3eme Science

série n°1

Généralité sur les fonctions

et

Produit scalaire dans le plan

Exercice 1 :

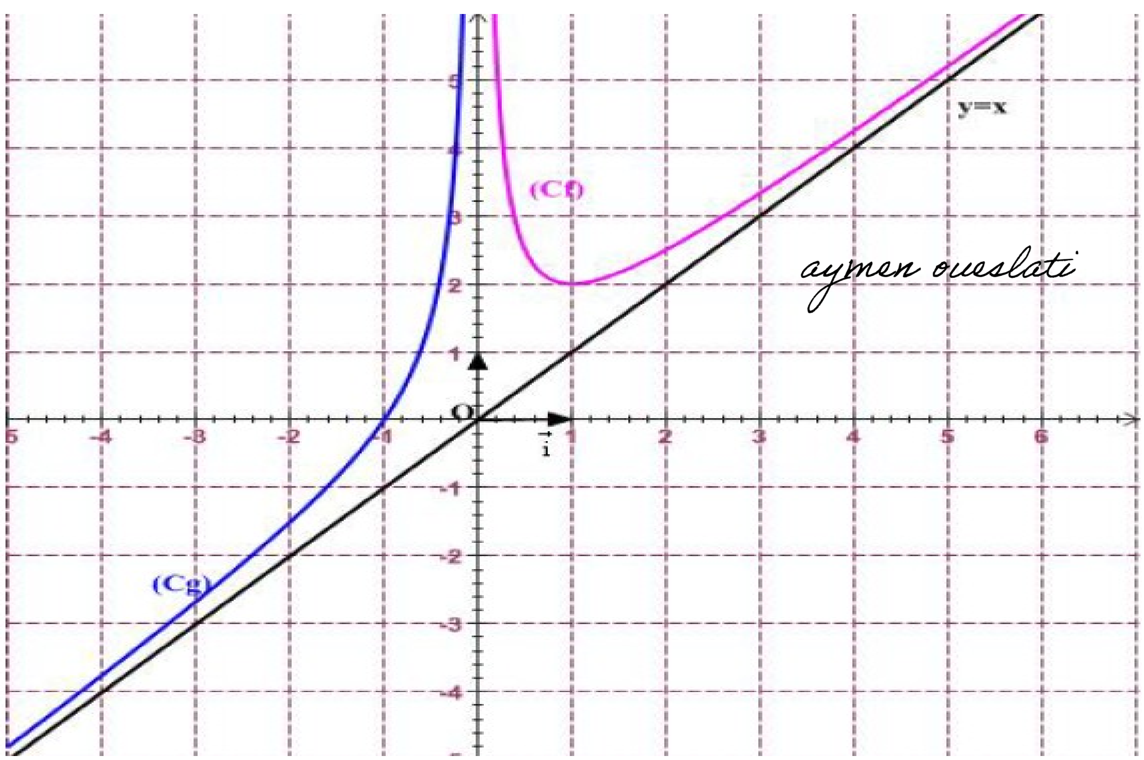
On considère la fonction f définie par $f(x)=x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x=\frac{1}{2}$.
3. Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; puis étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=x-\frac{1}{x}$.

1. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g.
2. Montrer que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$. Qu'en est il de g ?
3. Compléter les représentations graphiques de f et g dans le repère ci-dessous :



4. Préciser si f est majorée, minorée, bornée ou non sur chacun des intervalles suivants :
$\left[\frac{1}{2},3\right]$; $[1,+\infty[$ et $]0,1]$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

a) Trouver l'ensemble de définition de f.
b) Pour deux réels u et v, calculez f(u) – f(v).
c) Montrer que si u < v, le signe de f(u) – f(v) est celui de 1 – uv.
d) Montrer que si l'on a 0 <u ≤1 et 0 <v ≤ 1, alors uv ≤1 et que si u >1 et v >1, alors uv > 1
e) Déduisons que f est strictement croissante sur [0 ;1] et strictement décroissante sur [1 ;+∞[.
f) En procédant comme précédemment, étudier le sens de variation de f sur]- ∞ ;0].

Exercice 4 :

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ P la parabole d'équation $y = x^2$.

1.

a) D est la droite de coefficient directeur le réel m et qui passe par le point A(1 ;1).Montrer qu'une équation de D est y =m(x-1) +1.
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de D et P.
c) Déterminer le réel m pour que la droite D coupe P en un unique point. Tracer P et la droite D correspondante à la valeur de m trouver.

2.

a) D est la droite dont une équation est y = 2x + b, où b est un réel. Construire D pour b = -2 et pour b = 3
b) Expliquer pourquoi, si P et D en des points commun, alors leurs abscisses sont solutions de l'équation $x^2 -2x - b = 0$.
c) Déduisons que cette équation à des solutions si et seulement si 1 + b ≥ 0.

Exercice 5 :

a) Représenter dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ les fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \frac{4}{x} \text{ et } g : x \mapsto x^2 - x .$$

b) Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes.
c) Déterminer une équation de la droite D passant par C(-1 ;2) et B(3 ;6). Tracer cette droite sue le schéma précédent.
d) Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de D avec l'hyperbole représentant f.
e) Déterminer graphiquement l'ensemble de solution de chacune des inéquation

$$\frac{4}{x} \le x+3 \ ; \ \frac{4}{x} \ge x^2 - x \ ; \ x+3 \ge x^2 - x .$$

f) Déduisez-en l'ensemble des solution de chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0 \\ x^3 - x^2 - 4 \le 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x^2 - x \le \frac{4}{x} \le x+3$$

1 Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère les points F (4,1) N $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ et la droite $\Delta : y=-\frac{1}{4}$

1/ a) Déterminer et construire l'ensemble I des points M équidistants du point N et de Δ .

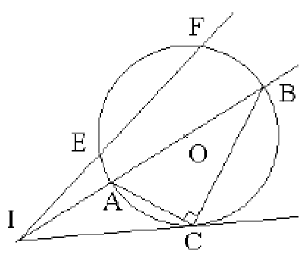
b) Déterminer l'ensemble :

$$E=\left\{M(x,y)\in P;\ \overrightarrow{MF}.\overrightarrow{MO}=x^4-4x\right\}$$

c) En déduire $G = E\cap I$

2/ Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ. Existe-t-il un point M de G tel que le triangle MNH est équilatéral ?

2 On considère un cercle Γ de centre O et de diamètre [AB]. Soit C un point de Γ distinct de A et de B et n'appartenant pas à la médiatrice de [AB]. La tangente à Γ en C rencontre (AB) en I. (voir figure)



Le but de l'exercice est de démontrer l'égalité $\overline{IE}.\overline{IF}=\overline{IA}.\overline{IB}$

1/ Démontrer que $\overline{IA}.\overline{IB}=IC^2$

2/ Soit Δ une droite qui passe par I et qui coupe Γ en deux points distincts E et F.

a) Montrer que $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{FE}$ puis l'utiliser pour montrer que $\overrightarrow{EF}\perp\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}\right)$. En déduire $\overrightarrow{IF}\perp\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AE}\right)$

b) Démontrer les égalités $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{IF}.\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}$

c) Déduire alors l'égalité $\overline{IE}.\overline{IF}=\overline{IA}.\overline{IB}$

3 Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r = 1, et ABCD un rectangle de sens indirect inscrit dans Γ.

On désigne par Δ la tangente à Γ en B et par E le point d'intersection de Δ avec (AC) et on pose $\theta=B\hat{O}A$. (avec $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$)

1/ Démontrer l'égalité $AD^2-AB^2=4\cos\theta$

2/ Exprimer AB et EB en fonction de θ. Déduire la valeur de θ pour laquelle $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=\cos\theta$

3/ Pour la valeur de θ trouvée, calculer de trois manières la distance AE. (On pourra utiliser la formule de l'exercice N°2 question 1/)

4 Sur le cercle trigonométrique, on considère les points M_n tels que $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM_n}\right)\equiv\alpha_n[2\pi]$ $\alpha_n\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\forall n\in IN$ et $2\left(\vec{i}.\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)^2=1+\vec{i}.\overrightarrow{OM_n}$

1/ Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n . En déduire $\vec{i}.\overrightarrow{OM_n}$ en fonction de α_0 et de n.

2/ Déterminer $\vec{i}.\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ en fonction de α_0 et de n et en déduire $\vec{i}.\overrightarrow{M_0M_{n+1}}$ en fonction de α_0 et de n.

3/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\vec{i}.\overrightarrow{M_0M_{n+1}}$

5 Le plan P étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$

1/ Montrer que $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\dfrac{aa'+bb'}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

2/ Soit $\vec{W}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\vec{j}$

a) Calculer $\|\vec{W}\|$

b) On pose $\alpha\equiv\left(\widehat{\vec{i};\vec{W}}\right)[2\pi]$. Calculer $\cos2\alpha$, puis en déduire la mesure principale de l'angle α .

6 On munit le plan P d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, et on considère les points A (1 , 3) , I (0 , – 1) et le cercle $\mathscr{C}$: $2(x-1)^2+2(y-3)^2=9$.

1/ Montrer qu'il existe deux droites D_1 et D_2 tangentes à $\mathscr{C}$ et passant par I. Déterminer leurs équations.

2/ a) Quelles conditions nécessaires et suffisantes faut-il satisfaire pour avoir des cercles tangents à D_1 et D_2 en même temps ? Déterminer alors, analytiquement, l'ensemble que décrivent les centres de ces cercles.

b) Quelle remarque peut-on faire ? Interpréter cette remarque géométriquement.

7 $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. Montrer qu'il n'existe qu'un seul point fixe équidistant de tous les points M qui vérifient : $OM=\cos\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$