LYCÉE ECHEBBI	Devoir de contrôle n°2	CLASSE4T1+2
PROF : DK AHMED	MATHÉMATIQUE	Duré 2h

EXERCICE N1(3points

Pour chacune des questions suivantes cocher la seul repense correct

1) Le nombre complexe $(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ est égal à

☐ 2 ☐ 2i ☐ $\sqrt{2}$

2) Sachant que $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation :$z^2-2\cos(\theta)\,z+1=0$ alors l'autre solution est

☐ $i\cos\theta$ ☐ $ie^{i\theta}$ ☐ $e^{-i\theta}$

3) Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[1;5]$ tel que $|f'(x)|\leq 3$ pour $x\in[1;5]$

☐ $|f(5)-f(1)|\leq 3$ ☐ $|f(5)-f(1)|\leq 5$ ☐ $|f(5)-f(1)|\leq 12$

EXERCICE N2(8points)

I. 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E: z^2+\sqrt{3}z+1=0$

2) Soit $P(z)=z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-i\sqrt{3})z-i$

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution imaginaire pur que l'on déterminera

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z

$$z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-i\sqrt{3})z-i=(z-i)(z^2+az+b)$$

c) En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique $4\ cm$

On considère les points A ; B d'affixe $z_A=i$; $z_B=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et C d'affixe z_C : C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses

a) Mettre sous forme exponentielle $z_A; z_B\ et\ z_c$

b) Placer les points A ; $B\ et\ C$

c) Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

d) Déduire la nature du triangle ABC

II. 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3=8$

b) Ecrire les solutions sous forme algébrique

EXERCICE N3(9points)

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur R par : $\begin{cases} \frac{x}{x-1} \; ; \boldsymbol{si\ x < 0} \\ \sqrt{x^2+2x}+x \; ; \; \boldsymbol{si\ x \geq 0} \end{cases}$

1) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est continue en **0**
2) a) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est dérivable à gauche en **0** et écrire une équation de la demi-tangente à gauche à C_f au point $O(0;0)$

b) Etudier la dérivabilité de $\boldsymbol{f}$ à droite en **0** et Interpréter graphiquement les résultats obtenus

3) Calculer $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ pour $x \in]-\infty;0[$ et pour $x \in]0;+\infty[$ puis établir le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$ sur **R**
4) Soit $\boldsymbol{g}$ la restriction de $\boldsymbol{f}$ à l'intervalle $[0;+\infty[$
   a) Montrer que $\boldsymbol{g}$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle $\boldsymbol{J}$ que l'on déterminera

b) déduire que l'équation $\boldsymbol{g(x)} = \sqrt{\mathbf{3}}$ admet une seule solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $[0:+\infty[$

5) Soit $\boldsymbol{g^{-1}}$ la fonction réciproque de $\boldsymbol{g}$
   a) Etudier la dérivabilité à droite de $\boldsymbol{g^{-1}}$ en $\boldsymbol{y_0} = \mathbf{0}$
   b) Etudier la continuité de $\boldsymbol{g^{-1}}$
   c) Quelle est la partie de $\boldsymbol{J}$ sur laquelle $\boldsymbol{g^{-1}}$ est dérivable ?

d) Déduire que $\boldsymbol{g^{-1}}$ est dérivable en $\sqrt{\mathbf{3}}$ et montrer que $(\boldsymbol{g^{-1}})'(\sqrt{\mathbf{3}}) = \frac{\sqrt{3}-\alpha}{\sqrt{3}+1}$

e) Expliciter $\boldsymbol{g^{-1}(x)}$ $pour\ x \in [0;+\infty[$

Bon travail