

EXERCICE 1 (3 points)

1/ Le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ est une racine cinquième de :

- a) 1 b) i c) -i

2/ U est une suite définie sur \mathbb{N} tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $n \leq U_n \leq n+1$ alors :

- a) U est croissante b) U est bornée c) U est convergente

3/ Soit f une fonction tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ on a :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = 0$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 2 (6,5 points)

1/ On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + 2ie^{i\theta} z - 4(1-i) e^{i2\theta} = 0$ avec $\theta \in [0, \pi]$

- a. Vérifier que $z_1 = -2e^{i\theta}$ est une solution de l'équation (E)
 b. En déduire la deuxième solution z_2 de (E)

2/ On considère dans le plan complexe muni d'un R.O.N (O ; \vec{u} , \vec{v}) les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = -2e^{i\theta}$ et $z_2 = 2(1-i)e^{i\theta}$

- a. Déterminer l'écriture exponentielle de z_1 et z_2
 b. Montrer que M_1 varie sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 c. Déterminer l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie dans $[0, \pi]$

3/ On prend $\theta = \frac{3\pi}{4}$

- a. Vérifier que $z_1 = 2i\sqrt{2}$
 b. Soit α un réel différent de $(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Montrer que si $\frac{z}{1-z} = e^{i\alpha}$ alors $z = \frac{1}{2}(1 + i \tan(\frac{\alpha}{2}))$
 c. Déterminer les racines cubiques de i
 d. Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation $(\frac{z\sqrt{2}}{1-z})^3 = 2i\sqrt{2}$

EXERCICE 3 (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1/a. Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $\frac{-2}{x} \leq f(x) \leq 0$

b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement

c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0

2/a. Vérifier que pour tout réel $x < 0$ on a $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}$

b. En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et déterminer $f(]-\infty, 0[)$

3/ Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par $g(x) = \tan(\pi f(x))$

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$.

b. Montrer que l'équation $g(x) = -2$ admet au moins une solution $\alpha \in]-3, -2[$

EXERCICE 4 (4 points)

Soit (U_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

1)a. Montrer par récurrence que $U_n > -1$

b. Montrer que la suite U_n est décroissante.

c. Déduire que la suite U_n est convergente.

2) Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{1}{U_{n+1}}$

a. Montrer que V_n est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme V_0

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.