Devoir de contrôle N°1

*****Mathématiques*****

Exercice N°1 :08 pts

On considère la fonction f définie sur I = [-1 ; 1] par f (0) = 0 et f (x) = $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ si x ≠ 0

On désigne par ζ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

1) a) Montrer que f est continue ; dérivable en 0
   b) Montrer que f est impaire .

2) a) Vérifier que pour tout x ∈] 0 ; 1 [: $\frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right)$

   b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 .

3) a) Montrer que pour tout x ∈] 0 ; 1 [on a f' (x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}$

   b) Dresser le tableau de variation de f .

4) a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à ζ_f au point d'abscisse 0

   b) Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion pour ζ_f

   c) Construire ζ_f et (T) .

5) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur I . on pose g = f^{-1} .

   b) construire ζ_g dans le même repère .

   c) Montrer que pour tout x ∈ I ; g (x) = $\frac{2x}{1+x^2}$

6) Soit (U_n) définie sur IN par : $U_0 = -\frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = g(U_n)$

   a) Montrer que pour tout n ∈ IN : $-1 < U_n < 0$

   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente .

   c) Déterminer la limite de la suite (U_n)

ExerciceN°2 : 06 pts

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) d'unité graphique 3cm

1°) a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$

b) Déterminer le module et un argument de chacun des solutions.

2°) On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} + i$ et $z_B = -\sqrt{3} - i$

a) Ecrire z_A et z_B sous la forme exponentielle
b) Construire les points A et B à la règle et le compas (on laisse apparentes les lignes de construction)

3°) On considère le point C d'affixe $z_C = i\, z_A$.

a) Déterminer le module et un argument de z_C puis construire le point C dans le même repère
b) Montrer que le triangle OAC est rectangle et isocèle en O .
c) Déterminer puis construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z telle que $|z + \sqrt{3} + i| = |z - i\, z_A|$.

Exercice N°3 : 06 pts

Les deux parties de l'exercice sont indépendante.

] – cocher la repense juste

1°) le complexe ($-2\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$) à comme argument : a) ($-\frac{3\pi}{8}$) b) ($\frac{11\pi}{8}$) c) ($\frac{5\pi}{8}$)

2°) La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable sur l'intervalle

a)] – 1 ; 1] b) [- 1 ; 1] c)] -1 ; -1 [

3°) soit $z = 2\, e^{i\theta}$ et $z' = 3e^{i\theta}$ alors $\frac{z}{z'}$ est : a) réelle b) imaginaire pur c) complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire différent de zéro .

][- soit l'équation (E) : $z^6 = 8$

a) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$
b) Soit a une solution de l'équation (E) différent de $\sqrt{2}$
Montrer que : $a^5 + \sqrt{2}\, a^4 + 2\, a^3 + 2\sqrt{2}\, a^2 + 4\, a + 4\sqrt{2} = 0$
c) Montrer que les points M images des complexes solutions de l'équation (E) appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon .