

DEVOIR DE CONTROLE N° 1

10/2016

SECTIONS : 4^{ème} Sciences Expérimentales

EPREUVE : Mathématiques

DUREE : 2 heures

PROFS : Chokri Hlaoui, Abderrahmen Azzouz & Wissem Fligène

Exercice 1 : (5 pts)

- 1) Montrer que $-4 - 4i = 4\sqrt{2}.e^{i\frac{5\pi}{4}}$
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2i, z_B = 4 - 2i, z_C = 4 + 2i$ et $z_D = 1$.
 - a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$.
 - b) Dédire que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B .
- 3) Soit M un point du plan d'affixe $z \neq -2i$ et M' un point d'affixe z' tel que $z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$
 - a) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.
 - b) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(z' - 1)(z + 2i)$.
 - c) Dédire que : $DM' \cdot AM = 4\sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \widehat{DM'}) + (\vec{u}, \widehat{AM}) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$.

Exercice 2 : (5 pts)Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .Soit le nombre complexe $z = i + e^{i\theta}$; $\theta \in [0, \pi]$.

- 1) Vérifier que $z = 2 \cos\left(\frac{\pi - \theta}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi + \theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$
- 2) Pour cette question, on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$.
 - a) Ecrire z sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2 = 2 + \sqrt{3}$.
 - b) Ecrire z sous forme exponentielle.
 - c) En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- 3) Soit les points $N(e^{i\theta}), A(-i)$ et $I(1)$.
 - a) Montrer que $\frac{z_{\overline{AN}}}{z_{\overline{AI}}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
 - b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs \overline{AN} et \overline{AI} sont orthogonaux.

Exercice 3 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par
$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 1] \setminus \{0\} \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 8} - (x + 1) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

- 1) a) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty, 1] \setminus \{0\}$, on a $|f(x)| \leq |x|$.
b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.
- 2) Montrer que f est continue en 1.
- 3) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x)$.
b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
- 4) a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
b) Vérifier que $\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha}$.

Exercice 4 : (4 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 3}{U_n + 1} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leq U_n \leq 3$
- 2) a) Montrer que (U_n) est une suite croissante.
b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 3) a) Vérifier que $3 - U_{n+1} = \frac{U_n(3 - U_n)}{U_n + 1}$
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - U_n)$
c) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3 - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ puis retrouver la limite de la suite (U_n) .