Mathématiques	Devoir de contrôle N°1	
Lycée Takelsa		
Classe :4 ème Sc.Exp 1 Date : le 17/11/2015	Durée : 2 h	Prof : Ziadi Mourad

Exercice N :1 (03pts)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » ; en justifiant la réponse.

1) Toute suite croissante et bornée est convergente.

2) Soit dans $\mathbb{C}$; l'équation (E) : $z^2 - 2015z + 2i = 0$. Si z' et z'' sont les solutions de (E) , alors $Arg(z') + Arg(z'') \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

3) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} = 0$.

Exercice N :2 (06pts)

Soit $f_\theta(z) = z^2 - (1+i)(1+e^{i\theta})z + i(1+e^{i\theta})^2$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

1) a) Vérifier que $f_\theta(1+e^{i\theta}) = 0$.
   b) En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on considère les points E , F , M et N d'affixes respectives $z_E = 1$, $z_F = i$, $z_M = 1 + e^{i\theta}$ et $z_N = i(1+e^{i\theta})$.

On désigne par (C_1) et (C_2) les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

a) Calculer $Aff(\overrightarrow{EM})$ et $ff\ (\overrightarrow{FN})$.
b) Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$; M varie sur(C_1) et N varie sur (C_2) .
c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

3) Soit P le point d'affixe $z_P = (1-i)sin\theta . e^{i\theta}$

a) Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{EP})}{Aff(\overrightarrow{EM})} = sin\theta - cos\theta$ et calculer $\frac{Aff(\overrightarrow{FP})}{Aff(\overrightarrow{FN})}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN) .

Exercice N :3 (05pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} & si\ x < 0 \\ \frac{x^2 \sin(\frac{2}{x})}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $\frac{-x^2}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{x+1}$.
   b) En déduire la limite de f à droite en 0 .
   c) Montrer, alors que f est prolongeable par continuité en 0 , puis définir ce prolongement.

2) a) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

   b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

3) Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $h(x) = f(\frac{1}{x-1})$.

   a) Montrer que h est continue sur $]1, +\infty[$.

   b) Calculer $\lim_{x\to1^+} h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

Exercice N :4 (06pts)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$.
   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
   c) En déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.
   d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{n+1}$.

2) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, U_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots + \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

   On pose $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}$; puis déduire que la suite (V_n) est décroissante.
   b) Montrer que la suite (W_n) est croissante.
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n \leq V_n$.
   d) En déduire que les suites (V_n) et (W_n) sont adjacentes.
   e) Montrer, alors que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

BON TRAVAIL