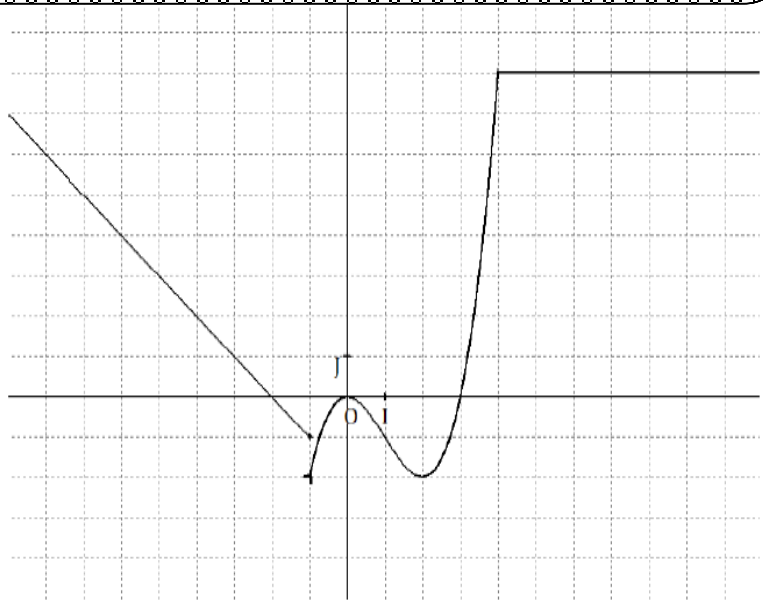
L.Kesra +L.C.Kesra	Devoir de Contrôle n°1	2015 / 2016
$4^{éme}$ Sciences Exp Durée : 2 heures	Mathématiques	Prof: B.Tmim B.Allala

Exercice n°1 :(3,5 pts)



La courbe ci-contre (C_f) est celle d'une fonction f qui est définie sur $\mathbb{R}$. par lecture graphique :

1) Déterminer : $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$; $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer $f(]-\infty,0])$ et $f([0,+\infty[)$.

4) Déterminer le nombre des solutions des équations : $f(x) = -1$ et $f(x) = -2$

Exercice n°2 : (5,5 pts)

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 3x + 2\sin(x)$.

a) Montrer que pour tout $x \in IR$; $3x - 2 \leq g(x) \leq 3x + 2$.

b) En déduire $lim_{x\to+\infty}\ g(x)$ et $lim_{x\to-\infty}\ g(x)$.

2) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{g(x)} & si\ x > 0 \\ x^3 - 3x + \frac{1}{5} & si\ x \leq 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que pour tout $x > \frac{2}{3}$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq f(x) \leq \frac{x}{3x-2}$.

c) En déduire $lim_{x\to+\infty}\ f(x)$.

3) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans]-2 , -1[.

b) Montrer que : $\alpha = \frac{1}{15 - 5\alpha^2}$.

Exercice n°3 : (5,5 pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4\,U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$

1) **a)** Vérifier que pour tout $n \in IN$; $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{U_n+1}$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_n \geq 2$.

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante.

d) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente et calculer sa limite.

2) **a)** Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(U_n - 2)$.

b) Montrer que par récurrence que pour tout $n \in IN$; $U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Retrouver la limite de la suite (U_n) .

<u>Exercice n°4 :(5,5 pts)</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives : $Z_A = 1$, $Z_B = i$ et $Z_D = 1 + i$.

1) Montrer que $\frac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D}$ est imaginaire. Déduire la nature du triangle ABD .

2) Montrer que $OADB$ est un carré.

3) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que $|z - 1| = |iz + 1|\ \}$.

4) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$ et $z' = \frac{z}{z\ -\ i}$, on considère les points $M(z)$ et $M'(z')$.

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' est imaginaire.

5) a) Vérifier que $z' - 1 = \frac{i}{z\ - i}$; montrer alors que $AM' \times BM = 1$.

b) Déduire que si M appartient au cercle $\zeta\left(B, \frac{1}{2}\right)$ alors M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

<u>Bon travail</u>