Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification.

1) si f est une fonction continue sur [-1, 1] et g est une fonction continue sur IR alors la fonction gof est continue sur

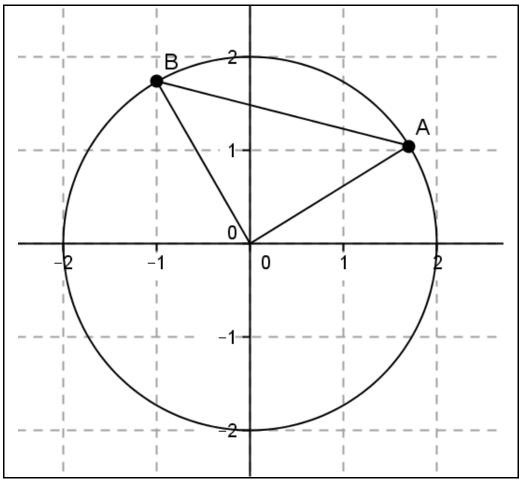
a) [-1,1] b) IR\ $\{-1,1\}$ c) IR

2) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectifs $Z_{\vec{u}} = 3e^{i\frac{4\pi}{9}}$ et $Z_{\vec{v}} = 2e^{i\frac{-5\pi}{9}}$ alors

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

3) Le plan complexe set muni d'une repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).On donne dans la figure ci contre un cercle de centre O et de rayon 2 et deux points A et B tel que OAB est un triangle rectangle en O et $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors :

a) $Z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ b) $Z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ c) $Z_B = 2e^{5i\frac{\pi}{6}}$



Exercice n°2 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par f(x) = $\begin{cases} x^2 + xSin(\frac{1}{x}) + 1 & si \ x \succ 0 \\ x^3 + x + 1 & si \ x \leq 0 \end{cases}$

1)a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $x^2 - x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$

b) Déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Montrer que f est continue en 0 .

2) a)Calculer f'(x) pour tout x $\in]-\infty, 0]$.

b) Monter que l'équation f(x) =0 admet dans $]-\infty,0]$ une unique solution α puis vérifier que : -0,7 < α < - 0,6.

c) Vérifier que : $\alpha^3 = -1 - \alpha$

3) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\frac{x+1}{x^2})$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(\frac{x+1}{x^2})$

<u>Exercice n°3 :</u> (6 points)

1) Résoudre dans C l'équation (E) :Z^2 -2Z+4=0

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $Z_A = 1+i\sqrt{3}$, $Z_B = 2ie^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_C = 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Ecrire Z_A et Z_B sous forme exponentielle.

b) Construire les points A et B dans le repère.

c) Monter que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

d) Montrer que : $Z_C = Z_A + Z_B$

e) Déduire que OACB est un losange.

3) soit le point M d'affixe $Z_M = e^{2i\theta} + 1$ où $\theta \in [0, \pi]$

a) Vérifier que : $Z_M = 2Cos(\theta)e^{i\theta}$

b) Déterminer la valeur de θ pour que O, A et M soit alignés.

<u>Exercice n°4 : (5 points)</u>

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n}$

1) a) Montrer que pour tout n on a : $0 \le U_n \le 1$.

b) Etudier la monotonie de la suite U.

c) Déduire que U est convergente puis calculer sa limite.

d) Montrer par récurrence que pour tout n on a : $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

2) Soit la suite (S_n) définie sur IN par :

$$S_n = \sum_{K=0}^{n} (-1)^K U_K = \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^K}{K+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

a) Montrer que : $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{-1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+3}$ puis déduire que la suite (S_{2n}) est décroissante.

b) Montrer que la suite (S_{2n+1}) est croissante.

c) Montrer que pour tout n on a : $S_{2n+1} \le S_{2n}$

d) Déduire que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

e) Déduire que la suite (S_n) est convergente.

<u>Bon travail</u>