Lycée Nebeur 2013-2014	**Devoir de contrôle n°1** Mathématiques	Prof : J-Naceur Classes : 4sc

Exercice n°1 : (3pts)

Pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte .Indiquer la quelle .

1) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

2) L'ensemble des points M(z) tel que $z=2i+e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel est :

a) une droite
b) un cercle de centre A(2i) et de rayon 1
c) un cercle de centre A(-2i) et de rayon 1

3) L'ensemble des points M(z) tel que : $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ est :

a) L'axe des ordonnés
b) Le cercle trigonométrique
c) L'axe réel .

Exercice n°2 : (5pts)

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ et on considère le cercle (C) de centre A d'affixe 1 et de rayon 1 .

F , B et E les points d'affixes respectives $z_F = 2$; $z_B = 1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_E = 1+z_B^2$

1) a) Montrer que B appartient à (C) .

b) Déterminer un argument de $\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABF .

2) a) Montrer que pour tout $\left]0,\pi\right[$, $1+e^{i\theta}=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) Déterminer alors la forme exponentielle de z_B

c) Montrer que A,B et E sont alignés .

3) Pour tout nombre complexe $z\neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et $1+z^2$

Montrer que $\dfrac{z^2}{z-1}$ est réel si et seulement si A,M et M' alignés .

Exercice n°3 : (6pts)

On considère la fonction définie sur IR* par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

1) a) Vérifier que pour tout x non nul : $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 0 et définir g .

2) a) Montrer que pour tout réel x , on a $\sqrt{1+x^2}+1\leq 2\sqrt{1+x^2}$

b) En déduire que : $f(x)\geq \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$

c) Montrer que pour tout réel non nul x on a : $f(x)\leq \dfrac{1}{1+|x|}$

3) Calculer alors les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 f(x)$

4) a) Montrer que f strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

b) Montrer que l'équation : $f(x)=\dfrac{2}{5}$ admet une solution unique dans $]1,2[$.

<u>Exercice n°4</u> : (6pts)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par : $u_0=2$, $v_n=\dfrac{2}{u_n}$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 1 et majorées par 2 .

2) a) Montrer que pour tout $n\in IN$: $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$

b) Montrer alors par récurrence , que tout $n\in IN$ $u_n\geq v_n$.

c) Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante . En déduire qu' elles sont convergentes .

3) a) Montrer que si $1\leq x\leq 2$ et $1\leq y\leq 2$ alors $x-y\leq 1$ et $\dfrac{x-y}{2(x+y)}\leq\dfrac{1}{4}$

b) En déduire que : $u_{n+1}-v_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}(u_n-v_n)$

c) Montrer alors que : $u_n-v_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes .

4) On donne : pour tout $n\in IN$, $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq\dfrac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de (v_n).

Bon travail