Lycée technique Teborba Manouba	Devoir de contrôle n°1	2013/2014
	Epreuve : Mathématiques / Coefficient : 3	Prof : H-Jamel
SECTION : science	Durée : 2 heures	Classe : bac-sc

Exercice n°1

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, <u>en justifiant la réponse</u>

1) *La suite définie pour tout entier naturel* n *par* $u_n = \frac{1}{n+1} + (-1)^n$ *est convergente*
2) *Le nombre complexe* $a = (\sqrt{3} + i)^{2010}$ *est imaginaire pur*
3) $\frac{13\pi}{12}$ *est un argument du nombre complexe* $z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$
4) *Soit* θ *un réel. L'ensemble des points* M *d'affixe* $z = 1 - 3i + e^{2i\theta}$ *est le cercle de centre le point* $J(-1+3i)$ *et de rayon* 1
5) *Pour tout nombre complexe z , si |1 + i z| = |1 − i z| , alors la partie imaginaire de z est nulle*
6) *Dans le plan est rapporté au repère orthonormé* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *on considère les points* A *et* B *d'affixes respectives non nulles* z_A *et* z_B *telle que* $z_B = iz_A$ *.*
   Le triangle OAB *est alors rectangle isocèle en* O

Exercice n°2

Soit f *la fonction définie sur IR par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\ x \geq 0 \\ \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & si\ x \prec 0 \end{cases}$$

1) *Montrer que* f *est continue en* 0
2) *a/ Montrer que pour tout réel positif* x *on a :* $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

   b/ En déduire la limite de $f(x)$ *en* $+\infty$

3) Déterminer, <u>en justifiant la réponse</u>, les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ **et**

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(1-\sin x)$

4) a/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ **admet dans** $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ **une solution qu'on notera** α

b/ Montrer que $\tan(\alpha)=-\sqrt{\alpha-1}$

Exercice n°3

1-a/ Vérifier que : $(1+\sqrt{3}+2i)^2=2\sqrt{3}+4i(1+\sqrt{3})$

b/ Résoudre alors dans C l'équation : $z^2-(3+\sqrt{3})z+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i)=0$ **et mettre les solutions sous forme algébrique**

2-Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm) on considère les points $A;B$ **et** Ω **d'affixes respectives** $z_A=1-i$ $z_B=2+\sqrt{3}+i$ **et** $z_\Omega=2$

Soit ζ **le cercle de centre** Ω **et de rayon** 2

a/ Vérifier que $B\in\zeta$

b/ Placer les points A **et** Ω **.Construire alors le point** B

3-a/ Ecrire z_A **sous forme exponentielle**

b/ Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ **sous forme algébrique**

c/ Montrer que $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d/ En déduire la forme exponentielle de z_B

e/ Déterminer alors la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice n°4

On considère les suites (a_n) **et** (b_n) **définies par :** $a_0=3$**,** $b_0=1$ **et pour tout entier naturel** n **on a :** $a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n+3}{3}$ **et** $b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n+3}{3}$**. On pose** $u_n=a_n-b_n$

1) ***a/ Montrer que pour tout entier naturel*** n **,** $u_n = 2(\frac{1}{3})^n$

b/ En déduire la limite de (u_n)

2) On pose , pour $n \in N^*$**,** $v_n = \dfrac{a_n + b_n}{n}$

a/ Montrer que pour tout $n \geq 1$ ***on a :*** $v_n \geq 2$

b/ Montrer que pour tout $n \geq 1$ ***on a :*** $v_{n+1} = v_n + \dfrac{2 - v_n}{n+1}$.

c/ En déduire que (v_n) ***converge vers un réel*** $l \succ 0$

2) ***Exprimer alors*** a_n ***et*** b_n ***en fonction de*** u_n **,** v_n ***et*** n ***puis déterminer les limites des suites*** (a_n) ***et*** (b_n).