L.S.M.Hayet	Devoir de Contrôle 1	Afli Ahmed
09/11/2013	Durée :2h	4 sc.exp

Exercice 1 :

Répondre par ***Vrai*** *ou* ***Faux*** *sans justification*

1./Si pour tout réel x strictement négatif, on a : $|f(x)-3| \le -\frac{1}{x}$ ***alors*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2./Soit f une fonction dérivable sur [-1,2] telle que : $1 \le f'(x) \le 2$ *et f(-1) = 0* ***alors*** $2 \le f(2) \le 6$

3./Soit a un nombre complexe, l'ensemble des points M(z) tels que (z- a)$(\bar{z}-\bar{a})$ *= 2013* ***est un cercle***

4./ On considère la suite (t_n) *définie sur IN par* $t_n = 3\times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \times \dots \times 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ***alors :*** $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 3$

Exercice 2 :

A.) *Soit la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par f(x) =* $\begin{cases} 1 + x^2 Sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ x > 0 \\ x^3 + x + 1 & si\ x \le 0 \end{cases}$

1. /Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. /a. Montrer que pour tout x $\in]0,+\infty[$ *on a :* $1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$

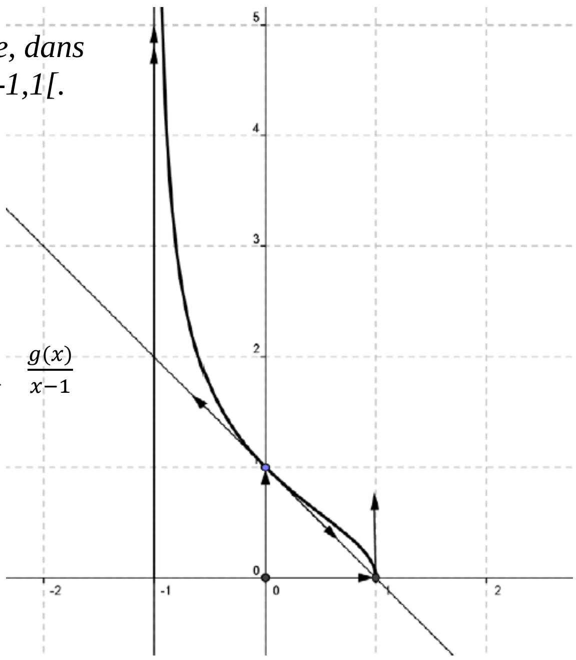
b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

c. Montrer que f est continue en 0

3. /a. Calculer f '(x) pour tout x $\in]-\infty, 0]$

b. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution x_0 *dans* $\in]-\infty, 0[$ *et vérifier que* $-0{,}7 < x_0 < -0{,}6$

B.) *La figure ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction g définie sur]-1,1[. Sur cette courbe est indiqué la tangente T à (Cg) au point d'abscisse 0, la demie tangente au point d'abscisse 1 et l'asymptote verticale.*



<u>En utilisant le graphique</u> :

1. / Déterminer : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{g(x)}{x-1}$

2. / Ecrire l'équation de T

3. / Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f\circ g(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{g\circ f(x)}{x}$

Exercice 3 :

Soit la suite réelle (U_n) definie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

1./ a. Calculer U_1 et U_2

b. Montrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < U_n < 3$

2./ Soit la suite (V_n) definie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c. Calculer la limite de (U_n)

3./On considère la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = 1 - V_n$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left((1 - (\frac{1}{4})^{n+1}\right)$

c. Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice 4 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,(unité graphique 4cm),

on donne les points A(2i) , B(i) ,C(-1+i) et D(1+i)

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice

1./ Soit l'application $f : P\backslash\{B\} \rightarrow P$, tel que $z' = i\frac{z-2i}{z-i}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$

Déterminer l'affixe du point A' image de A par f

2./a. Montrer que pour tout $z \neq i$, $|z'| = \frac{AM}{BM}$

Et que pour tout $z \neq i$ et $z \neq 2i$, $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})[2\pi]$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(z) tel que $|z'| = 1$

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M(z) tel que $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

3./a. Montrer que $(z'-i)(z-i) = 1$ pour tout $z \neq i$

b. En déduire que $BM \times BM' = 1$

c. Soit (C)le cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$ .Déterminer et construire son image par l'application f

Bon Travail