Lycée Said Boubaker Moknine	**Niveau : 4 sciences expérimentales**
Devoir de contrôle n°1	**Epreuve : Mathématiques**
Prof : Naija Yosra	**Durée : 2h / date: 24/11/2011**

Exercice 1 :(3 points)

Répondre par vrai ou faux (On ne demande aucune justification)

1) Les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ sont adjacentes

2) Soit une suite (u_n) dont aucun terme n'est nul. On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{-2}{u_n}$

Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

3) Si g est le prolongement par continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par

$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3}$ alors $g(3) = 2$

4) $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}=0$

Exercice 2 :(6 points)

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthonormé la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur IR\ {1} ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et 2.

Les droites d'équations respectives $\Delta: y = \frac{-5}{4}x + \frac{3}{4}$ $D: y = -2$ et $D': x = 1$ sont les asymptotes à(C).

1) Par lectures graphiques et sans justification:

a) Déterminer $f'(0), f'(2)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(2)$

b) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + \frac{5}{4}x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Déterminer $f(]1, +\infty[)$ et $f(]-\infty, 1[)$ et $f([2+\infty[)$

d) Donner le tableau de signe de f' la fontion dérivée de f

2) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = fof(x)$ on note (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé

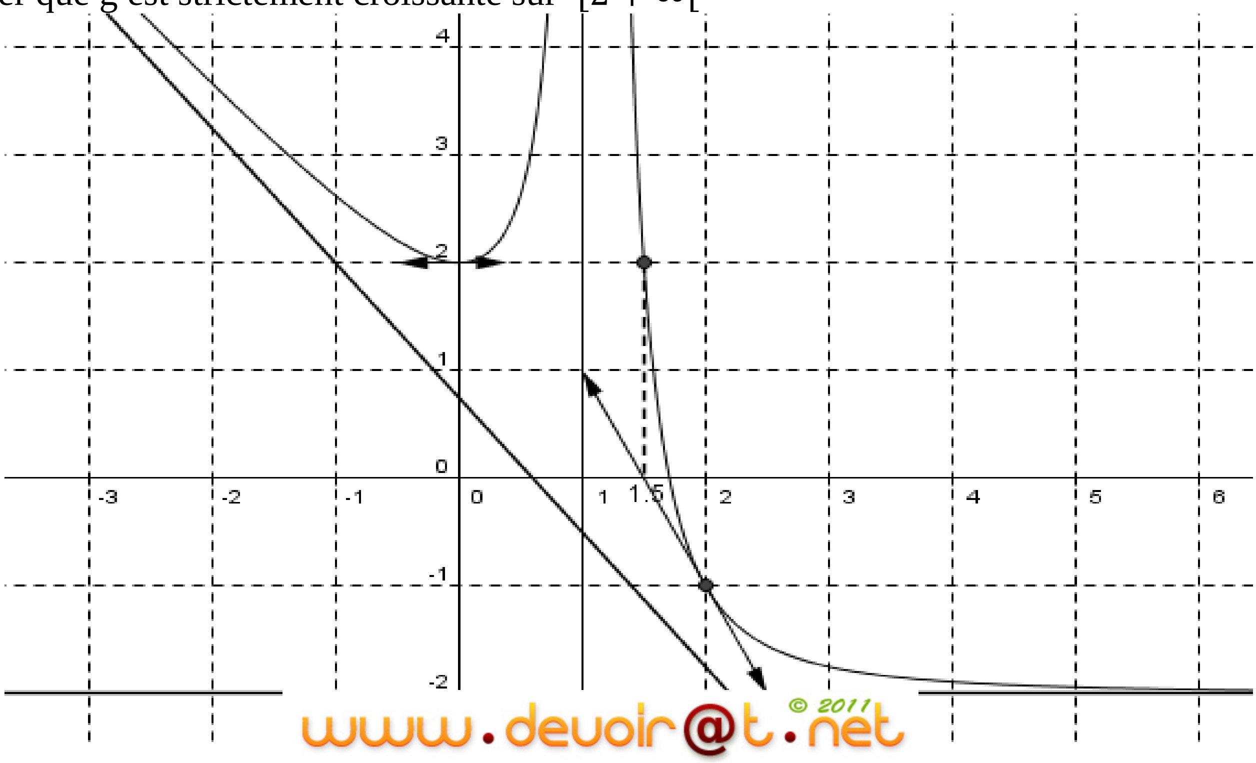
a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g

b) Déterminer en justifiant votre réponse : $g(0)$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

c) On admet que g est dérivable sur son domaine de définition

Montrer que (C_g) admet une tangente horizontale au point $A(0, -1)$

d) Montrer que g est strictement croissante sur $[2 + \infty[$



Exercice 3 :(5points)
Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthonormé les courbes(Γ) et (C) respectivement d'une fonction f dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f' ainsi que les droites $\Delta: y = x$ et $D: y = -0.5$

1) Utiliser le graphique pour justifier que :

a) $f([1,2]) \subset [1,2]$

b) L'équation $f(x) = x$ admet dans $[1,2]$ une solution unique α qu'on donnera une valeur approchée

c) Pour tout $x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

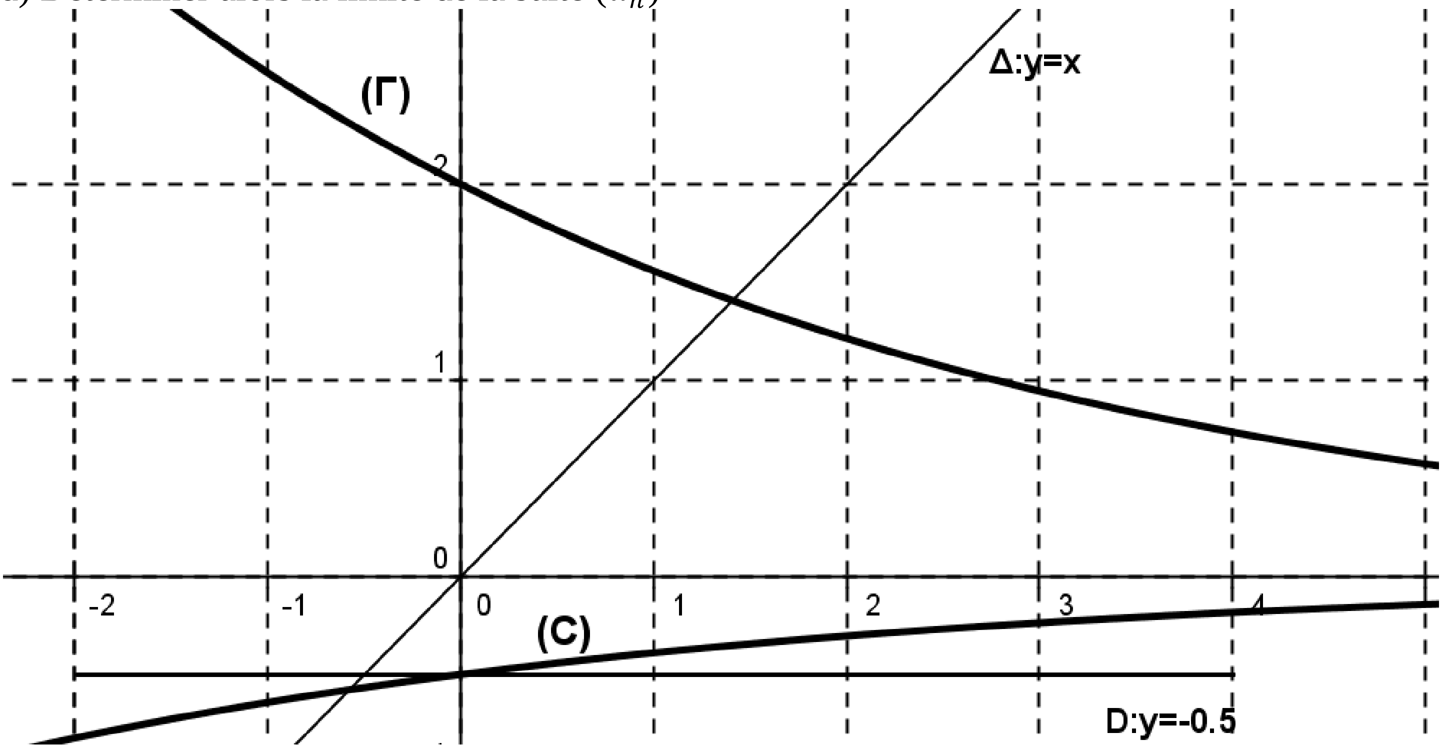
2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

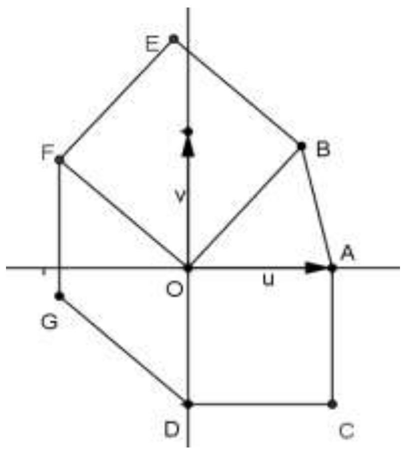
c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - \alpha)$

d) Déterminer alors la limite de la suite (u_n)



Exercice 4 :(6points)
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe $\alpha = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

On construit à l'extérieur du triangle OAB les carrés directs ODCA et OBEF, comme indiqué sur la figure ci-contre.



1) Déterminer les affixes des points C et D.

2) a) Montrer que l'affixe du point F est $z_F = i\alpha$.

b) En déduire que l'affixe du point E est $z_E = (1 + i)\alpha$

c) Ecrire z_E sous forme exponentielle

3) Le quadrilatère OFGD est un parallélogramme.
Démontrer que l'affixe du point G est égal à $i(\alpha - 1)$.

4) En déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle

5) Dans la suite, on prend $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

a) Montrer que $i + \alpha = 2\cos\frac{\pi}{20} e^{i\frac{9\pi}{20}}$

b) En déduire sous form

Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :1 + i, –1 + i, –1 – i et 1 – i.

1) Placer les points A, B, C et D
2) On note (C) le cercle de centre C et passant par B
3) a) Vérifier que D est un point de (C)

   b) Construire les point E et F de (C) tel que $\frac{\pi}{3}$

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

2. a) Démontrer que l'affixe du point E, notée zE, est égale à –1 + 3 .

b) Déterminer l'affixe zF du point F.

c) Démontrer que le quotient

z

A – z

E

z

A – z

F

est un réel.

d) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

Exercice 1 : (4point

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2+\sqrt{3} + i$

1) Ecrire sous forme exponentielle le nombre z_A

2) a) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{z_B}{z_A}$

b) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) En déduire la forme exponentielle de z_B

d) Déterminer alors cos $\frac{\pi}{12}$

3) On note C le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$

a) Montrer que l'affixe de C est $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\, e^{i\frac{-\pi}{12}}$