EXERCICE N° 01

Cocher la réponse juste

❖ La fonction $x \mapsto \sin(\pi x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

A ☐ $x \mapsto \cos(\pi x^2)$

B ☐ $x \mapsto 2\pi\, x \cos(\pi x^2)$

C ☐ $x \mapsto \cos(2\pi x)$

❖ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(k.\pi)$; E est la fonction partie entière , alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A ☐ $+\infty$

B ☐ $\dfrac{\pi}{2}$

C ☐ 0

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

❖ Soit $\Omega(1-i)$ .L'ensemble des points M d'affixe $z = x+iy$ tel que $|z-1+i| = |3-4i|$ à pour équation :

A ☐ $y = -x+1$

B ☐ $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$

C ☐ $z = 1-i+5e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$

❖ Les points $A(a), B(b), C(c), D(d)$ et $E(e)$ sont sur le cercle de diamètre $[AB]$, alors on a :

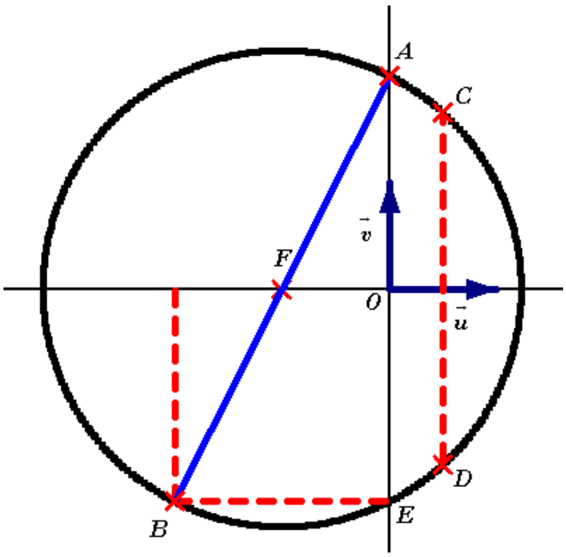
A ☐ $a+b=0$

B ☐ $\dfrac{b-c}{a-c} \in i\mathbb{R}$.

C ☐ $\arg\left(\dfrac{b-a}{e-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{e-c}{b-c}\right)[2\pi]$

D ☐ $c-e = \overline{d} - \overline{a}$

E ☐ $a+c+d+e=1$



EXERCICE N° 02

On considère l'équation :

$(E): z^2-(1+i)[1+\tan(\theta)]z+i[1+\tan^2(\theta)]=0 \quad ; \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1- a) Calculer $(1-i)^2[1-\tan(\theta)]^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ avec $z_1=1+i\tan(\theta)$ et $z_2=i+\tan(\theta)$; $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a) Déterminer la forme exponentielle de z_1 et de z_2

b) Montrer que $OM_1=OM_2$ et déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right)$

c) Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.

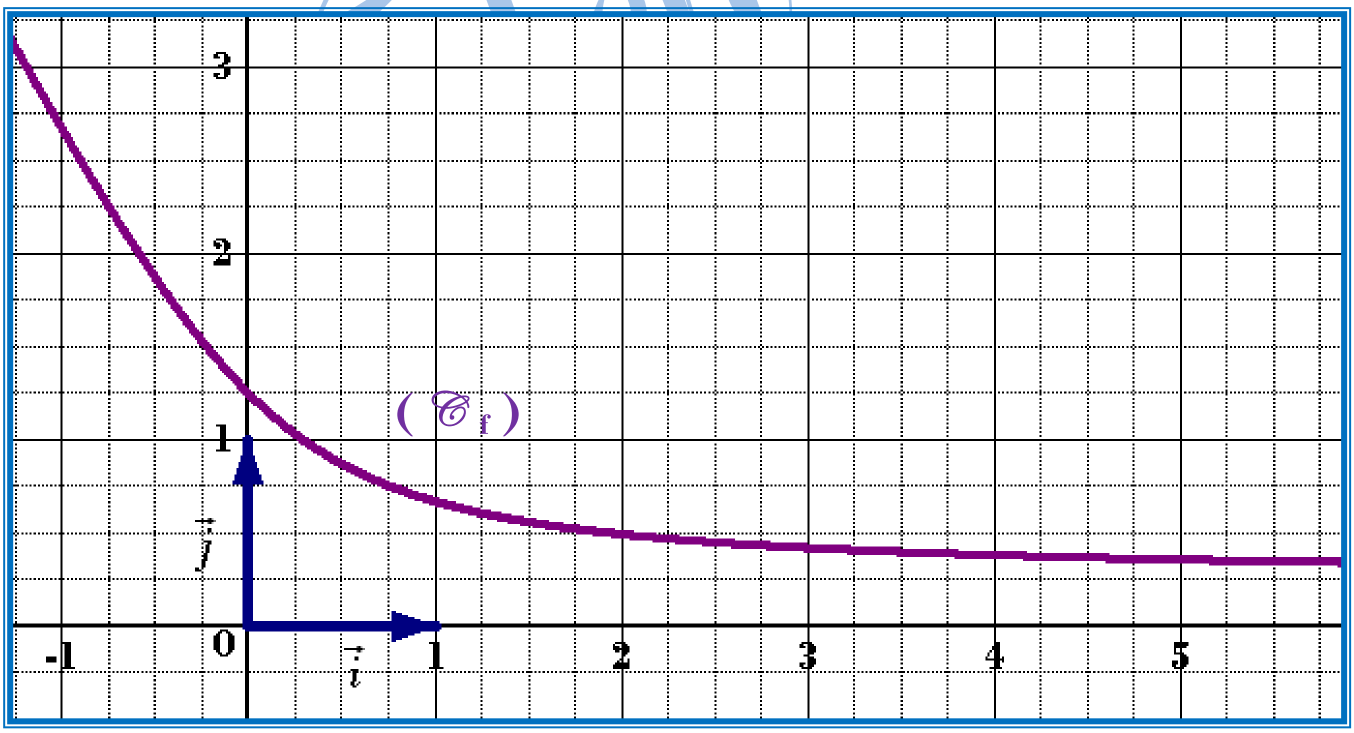
EXERCICE N° 03

La graphe ci contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.L'axe des abscisses est une asymptote à ($\mathscr{C}_f$) au voisinage de $+\infty$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$.

2- Déterminer $g\circ f([0,2])$



3- Montrer que l'équation $g\circ f(x)=1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE N° 04

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=h(u_n)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1- Montrer que $\forall\, x>0$, on a : $0<h(x)<x$

2- a) Montrer que $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

3- a) Exprimer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}^2}-\dfrac{1}{u_n^2}$ en fonction de u_n^2

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{u_n^2}=2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}u_k^2$

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_n\le\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4- a) Montrer que $\forall\, x\in\mathbb{R}$, on a : $h(x)\ge x-\dfrac{x^2}{2}$

b) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=h\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+h\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+h\left(\dfrac{3}{n^2}\right)+\cdots+h\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$

Prouver que $\dfrac{n+1}{2n}-\dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\le S_n\le\dfrac{n+1}{2n}$ (on donne $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

c) Montrer que S_n est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE N° 05

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=\begin{cases} x+\sin(\pi x^2) & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2x^2-x}{2-x} & \text{si } x\in[0,1] \\ 2-x+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

1- Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2- a) Montrer que pour tout $x<0$, on a : $x-1\le\varphi(x)\le x+1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}$

3- a) Montrer que l'équation $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha\in\left]\dfrac{3}{4},1\right[$

b) Donner un encadrement de α à 125×10^{-3} prés.

Bon Travail.....