Lycée Ibn Elhaythem Matmata Nouvelle devoir contrôle n°1 9/11/2023	Epreuve : *Mathématiques* Prof : Kayel .M	
	Durée : 2heures	$4^{éme}$*sc*

NB :votre copie doit être claire ;la justification et le numéro des questions sont obligatoires

Exercice N°1 (6pts)

Soit la suite U définie sur IN par : $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = \frac{5\,U_n - 4}{U_n}$

1/ a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 4$

b) Montrer que U est décroissante

c) Déduire que U est convergente puis calculer sa limite

2/ a) Montrer que pour tous entier naturel n on a : $U_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(U_n - 4)$

b) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $U_n - 4 \leq (\frac{1}{4})^n$

3/ a) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$4n + 4 \leq S_n \leq 4n + 4 + \frac{4}{3}(1 - (\frac{1}{4})^{n+1})$$

b) Calculer $\lim_{+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice N° 2 (7pts)

1/ a)Calculer : $(2 - i)^2$

b) Résoudre alors l'équation (E) : $\mathcal{Z}^2 - (1 + 2i)\mathcal{Z} - \frac{3}{2} + 2i = 0$

2/ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{U}\,;\vec{V})$. On considère les points A ; B et C d'affixes respectifs : $2e^{i\frac{\pi}{6}}$;
$2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ et $-1 + i\sqrt{3}$

a)Donner la forme algébrique de Z_A et la forme exponentielle Z_C

b) Construire les points A et C

3/ Calculer $\frac{Z_C}{Z_A}$; déduire la nature de OAC

4 / a) Montrer que : $e^{i\frac{\pi}{6}}$ - $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ = $e^{i\frac{\pi}{6}}$ (1-i)

b) En déduire que OBAC est un parallélogramme puis construire le point B

c) En déduire les valeurs exactes de cos $(-\frac{\pi}{12})$ $est\ sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

5/ déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe Z dans les deux cas suivants

$$\Delta = \{M \in P\ tq : \quad Z = a\,Z_B + Z_A \quad où\ a \in\ IR^* \quad \}$$

$$\mathcal{C} = \{M \in P\ tq\ :\ a(Z - Z_B) = i(Z - Z_C) \quad où\ a \in\ IR^*\}$$

Exercice N°3 (7pts)

Soit la fonction f définie sur IR par : f(x) = $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} - x & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{\mathbf{1 + x - \cos(\pi x)}}{\mathbf{x}} & si\ x < 0 \end{cases}$

1/ a) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

b) Calculer $\lim\limits_{(\frac{\pi}{2})^-} f(tanx)$

2/ Montrer que f est continue en 0

3/ a) Montrer que pour tout x < 0 : $\frac{x+2}{x} \leq\ f(x) \leq 1$

b) En déduire $\lim\limits_{-\infty} f(x)$

c) Calculer $\lim\limits_{0}\ f(\ 2(\frac{1-\cos(x)}{x^2})\ )$

4/ a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution β

dans] - 2 ; -1[

b) En déduire que : $\cos(\pi\beta\ ) = \beta + 1$