Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 4 ème Sc exp2
Date : 21 / 11 / 2020	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On appelle I et J les points d'affixes respectives 1 et i.

A- Soient le nombre complexe $u=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Ecrire sous la forme algébrique le nombres complexe $u'=\frac{i}{\overline{u}}$.

2) Donner la forme exponentielle de chacun des nombres complexes u et u'.

3) Soient A et A' les points d'affixes respectives u et u'.

$a/$ Construire les points A et A' dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ de la feuille annexe.

$b/$ Quel est la nature du triangles OAA'? Justifier la réponse.

B- A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{i}{\overline{z}}$.

1) $a/$ Montrer que $|z'|.|z|=1$ et que $\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}+\arg(z)[2\pi]$.

$b/$ En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) $a/$ Montrer que : $|z'-i|=|z'|$ si, et seulement si, $|z-1|=1$.

$b/$ Déterminer l'ensemble Δ des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 1 privé de l'origine.

$c/$ Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe $z\neq 0$. Construire le point M' d'affixe $z'=\frac{i}{\overline{z}}$

Exercice n°2 (7 pts)

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de nombres complexes l'équation :

$$(E): z^2-(1+i\sqrt{3})(1-i)z+2\sqrt{3}=0.$$

$a/$ Vérifier que $1-i$ est une solution de (E).

$b/$ Déduire l'autre solution de (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1-i$, $z_B=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ et $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$a/$ Vérifier que $z_B=i\sqrt{3}\,z_A$.

$b/$ En déduire que $z_A + z_B = z_C$, puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$c/$ Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un rectangle.

$d/$ Dans la figure de l'annexe ci-joint, on a placé le point B. Placer le point A et construire le point C.

3) Soit I le centre du rectangle $OACB$ et G le centre de gravité du triangle OAI.

$a/$ Montrer que $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_I)$.

$b/$ En déduire que $z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+i\right)z_A$.

$c/$ Donner alors le forme exponentielle de z_G.

Exercice n°3 ***(8 pts)***

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} & si\ x < 0 \end{cases}$

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$.

$b/$ En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x\right)$.

3) Montrer que f est continue en 0.

4) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} x f\left(\frac{1}{x}\right)$.

5) $a/$ Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$b/$ Montrer que : $\sin\alpha = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}$.

6) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \begin{cases} f(\tan x) \text{ si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$.

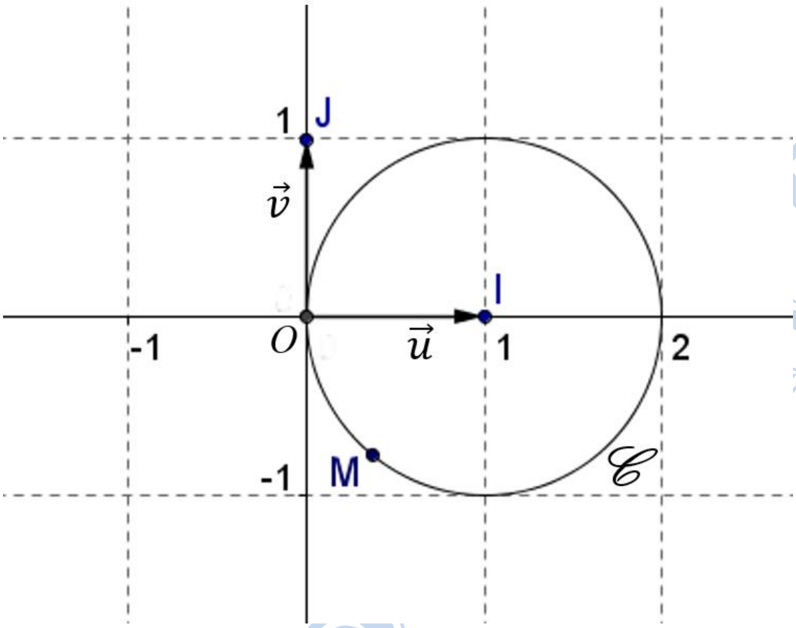
Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de contrôle n°1 (21 / 11 / 2020)

Nom et prénom : ………………………………………………………................ *Classe : 4 ème Sc exp 2*

Exercice n°1



Exercice n°2