

Exercice N :1(03pts)

Répondre par « Vrai » ou « Faux », en justifiant la réponse.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\tan(x)-1)}{(\tan(x)-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2) \text{ La suite } (V_n) \text{ définie sur } \mathbb{N} \text{ par : } V_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ est convergente vers } 0.$$

$$3) \text{ Soit } (U_n) \text{ la suite définie sur } \mathbb{N} \text{ par : } U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} ; n \geq 0, \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a :}$$

$$U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right). \quad (\text{On rappelle que : } \frac{1 + \cos(2a)}{2} = \cos^2(a))$$

Exercice N :2(07pts)

La figure ci-contre désigne la courbe (ζ_f) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Les droites d'équations respectives $y = x - 2$, $x = -1$ et $y = -1$ sont des asymptotes à (ζ_f) .

1) Par une lecture graphique :

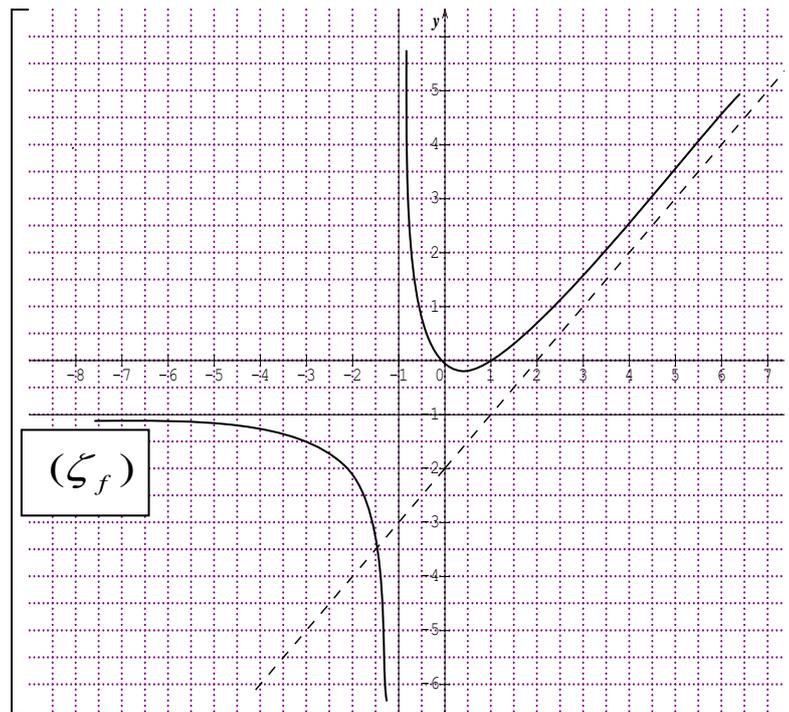
a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(x)+1} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} fof(x) - f(x) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right) - 1 \right).$$

b) Déterminer l'image de l'intervalle $] -\infty, -1[$ par $f \circ f$.



(ζ_f)

$$2) \text{ Soit } g \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } g(x) = \begin{cases} fof(x) & \text{si } x < -1 \\ \frac{2 \cos(\pi x)}{|x|+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g en -1 .

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, +\infty[$ on a : $\frac{-2}{|x|+1} \leq g(x) \leq \frac{2}{|x|+1}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

3) Dans la suite de l'exercice on admet que pour tout $x \in] -\infty, -1[$ on a : $f(x) = \frac{-x}{x+1}$.

Montrer que pour tout $x \in] -\infty, -1[$ on a : $g(x) = x$.

4) Soit h la fonction définie sur $] -\infty, -1[$ par : $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + x$.

- Montrer que h est continue sur $]-\infty, -1[$.
- Montrer que h est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$. En déduire $h(]-\infty, -1[)$
- Montrer, alors que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]-\infty, -1[$ une unique solution α ; puis vérifier que $-1.3 < \alpha < -1.2$.
- Montrer que $g(\alpha) + \frac{1}{g(\alpha)} = \alpha^3$.

Exercice N :3(05pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

- Donner la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z_A et $(1 + i\sqrt{3})z_A$.
 - Vérifier que $z_B = (i\sqrt{3})z_A$. En déduire que $z_A + z_B = z_C$.
 - Montrer que le quadrilatère OACB est un rectangle.
- Dans la (**figure 1**) de l'annexe ci-jointe on a tracé le cercle ζ de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.
 - Vérifier que B appartient à ζ , puis construire le point B.
 - Placer le point A et construire le point C.
- Soit I le centre du rectangle OACB et G le centre de gravité du triangle OAI.
 - Montrer que $z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A)$. En déduire $z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3} + i)z_A$.
 - Déterminer, alors la forme exponentielle de z_G .

Exercice N :4(05pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par M et M' les points d'affixes respectives $z = e^{i\theta} - i$ et $z' = e^{-i\theta} + i$; avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Montrer que pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe (O, \vec{u}) .
 - Déterminer, alors l'affixe du point N pour que $OMNM'$ soit un losange.
- Montrer que pour tous réels α et β on a : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$.
 - Ecrire, alors z et z' sous forme exponentielle.
- Vérifier que $z = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} z'$.
 - En déduire la valeur de θ pour que $OMNM'$ soit un carré.
 - Construire le carré $OMNM'$ pour la valeur de θ trouvée.

Annexe à rendre avec la copie

Nom.....Prénom :.....N° :.....

(Figure 1) de l'exercice N :3

