L'épreuve comporte deux pages. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. ***Le barème est approximatif.***

Exercice 1(5 pts)

1) Vérifier que : $e^{i2\alpha} - 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 1$. $(\alpha \in \mathbb{R})$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 0$. $\alpha \in \mathbb{R}$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points :

$M(e^{i\alpha})$, $M'(e^{i\alpha}-1)$ et $M''(e^{i\alpha}+1)$, $\alpha \in [0;\pi]$.

3) **a/** Montrer que M est le milieu de $[M'M'']$ et que : $\overrightarrow{MM'} = -\vec{u}$.

b/ Placer dans le plan le point M dans le cas où $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et construire alors les points M' et M''.

4) **a/** Montrer que : $OM = \frac{1}{2}M'M''$ et en déduire que $OM'M''$ est un triangle rectangle.

b/ Déterminer α pour que $OM'M''$ soit isocèle.

Exercice 2 **(**5pts**)**

On considère les nombres complexes z_n définies par : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A_n le point d'affixe z_n.

1) **a-** Donner la forme algébrique de z_2.

b- Vérifier que : $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

c- En déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2.

2) **a-** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{in\frac{\pi}{6}}$ est réel si et seulement si n est un multiple de 6.

c- Montrer alors que : $(\widehat{\overrightarrow{OA_0}\,;\overrightarrow{OA_n}}) \equiv \arg(z_n)[2\pi]$.

d- Déduire, en le justifiant, les valeurs de n pour lesquelles les points O, A_0 et A_n sont alignés.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a- Quelle longueur présente d_n ?

b- Calculer d_0 et d_1.

4) On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

b- En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

<u>Exercice 3</u> (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x},\ \text{si}\ x<1\\ \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1},\ \ \text{si}\ x>1\end{cases}$.

1) **a-** Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

   b- Montrer que : $\forall\, x>1,\ f(x)\le\dfrac{x+1}{x-1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) **a-** Montrer que : $\dfrac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=\dfrac{1-\cos(\pi(x-1))}{x-1}$.

   b- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) On pose $h(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) & \text{si}\ x>0\\ 1 & \text{si}\ x=0\end{cases}$. Justifier que h est continue sur $\left[0\ ;+\infty\right[$.

4) **a-** Montrer que f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;1\right]$. En déduire $f\left(\left]-\infty;1\right]\right)$.

   b- Montrer que l'équation $f(x)=-x^2$ admet une solution unique $\alpha\in\left]0\ ;\ 1\right[$.

   c- En déduire une racine du polynôme $\varphi(x)=x^4+2x^3+x^2+x-1$ dans [0,1].

<u>Exercice 4</u> (5 pts)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=\dfrac{n+1}{4^n},\ n\ge 0$.

1) **a-** Montrer que ; $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le\dfrac{1}{2}$.

   b- En déduire que ; $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   c- Calculer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

2) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$.

a- Montrer que (S_n) est une suite croissante.

b- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n\le 2$.

c- Que peut-on dire sur la convergence de la suite (S_n) ?

Fin de l'épreuve ../..