

Exercice 1 : (7 pts)

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$$

On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et on note A_n le point d'affixe z_n

1-a-donner la forme algébrique de z_2

b-vérifier que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

c-en déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2

2-a-montrer que pour tout entier naturel n :

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$$

b-montrer que pour tout entier naturel n , $e^{in\frac{\pi}{6}}$ est réel si et seulement si n est un multiple de 6

c-montrer que $(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_n}) \equiv \arg(z_n) [2\pi]$

En déduire en le justifiant les valeurs de n pour lesquelles les points $O; A_0$ et A_n sont alignés

3-pour tout entier naturel n , on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a-quelle longueur représente d_n ?

b-calculer d_0 et d_1

c-on admet que pour tout entier naturel n , $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

Montrer que pour tout entier naturel n , $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$

d-en déduire que pour tout entier naturel n , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n

4-construire, en justifiant la construction, a la règle et au compas le point A_5 . (Annexe 1)

Exercice 2 : (6 pts)

dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$

Soit A le point d'affixe $z_A = 2 + 2i$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe Γ en deux points H et K tel que $OH < OK$

1-montrer que $z_H = (2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_K = (2\sqrt{2}+2)e^{i\frac{\pi}{4}}$

2- a tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{-4}{z}$

a-montrer que pour tout point distinct de O on a : $OM \cdot OM' = 4$

b-montrer que pour tout point distinct de O on a : $(\vec{u}; \widehat{OM'}) \equiv \pi - (\vec{u}; \widehat{OM}) [2\pi]$

3-soient $z_{H'}$ et $z_{K'}$ les affixes respectifs de H' et K' tels que

$$z_{H'} = \frac{-4}{z_H} \text{ et } z_{K'} = \frac{-4}{z_K}$$

a-montrer que : $z_{H'} = (2\sqrt{2}+2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{K'} = (2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b-construire les points H' et K'. (Justifier). (Annexe 2)

Exercice 3 (7 pts)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{x}\cos(x)}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1-a-montrer que f est continue en 0

b-en déduire $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^2(x)}{4(\sqrt{\cos^2(x)+1}-1)}$

2-a-montrer que pour tout réel x positif, on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b-en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. interpréter graphiquement le résultat.

3-enoncer le théorème des valeurs intermédiaires puis montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

4-la courbe en annexe (3) représente une fonction g dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et qui admet la droite $D : y=1$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $-\infty$

a-à l'aide d'une lecture graphique :

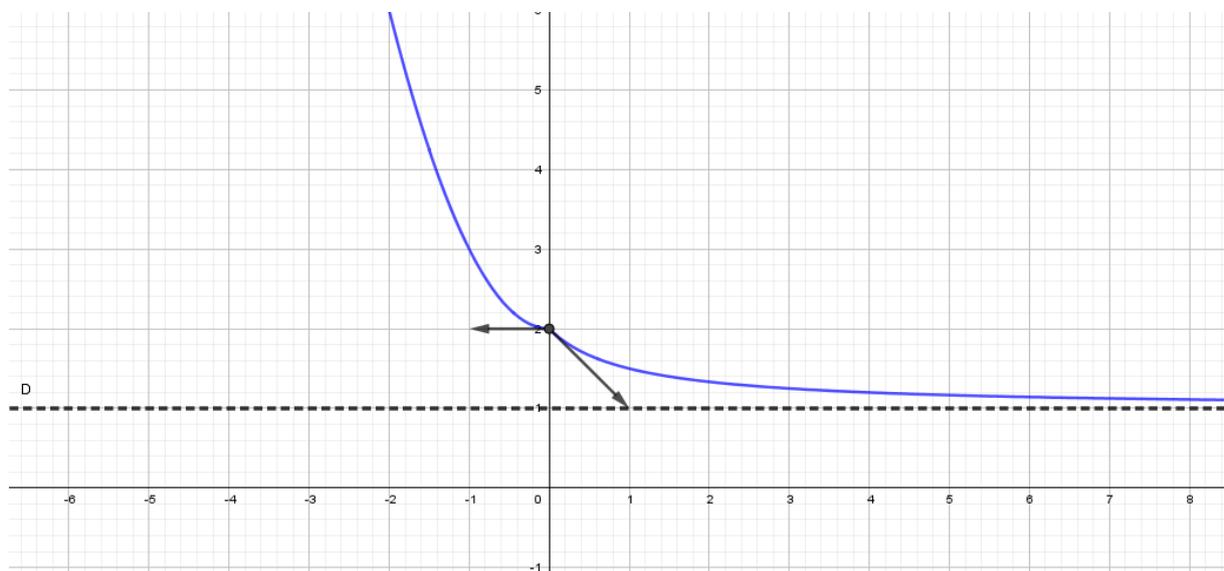
-dresser le tableau de variation de g et préciser $g(\mathbb{R})$

-prouver que l'équation $g(x)=\alpha$ admet une unique solution $\beta \in \mathbb{R}$

b-calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2019^-} g\left(\frac{3x}{2019-x}\right)$

c-démontrer que $\text{tg}(g(\beta)) = -\sqrt{\alpha - 1}$

Annexe 3 :

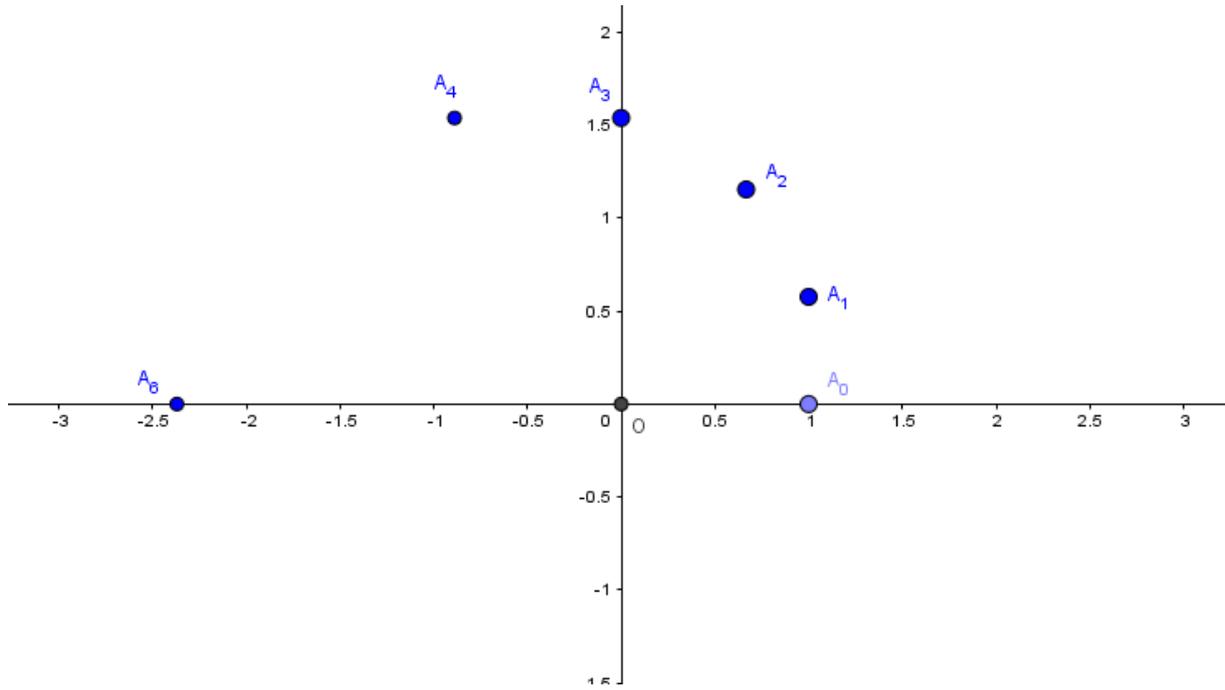


😊😊😊 BON TRAVAIL 😊😊😊

Annexes

Nom et prénom :

Annexe 1 :



Annexe 2 :

