

Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3

EXERCICE 1 (7 pts)

Soit la fonction **f** définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1- Montrer que **f** est continue sur \mathbb{R}^* .

2-a-Vérifier que pour tout $x < 0$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$

b-Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

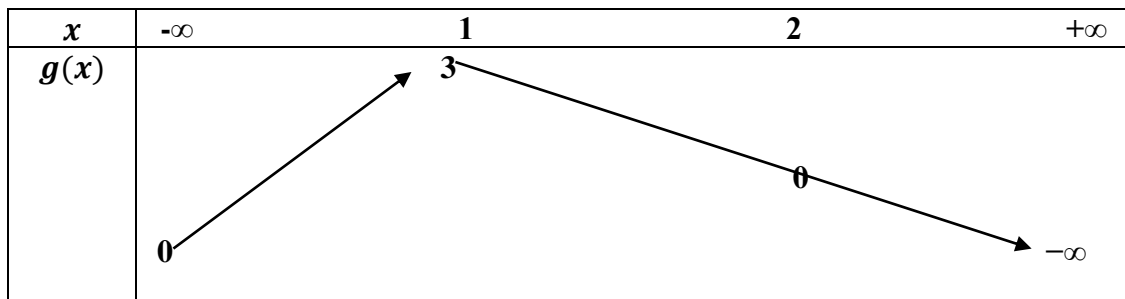
c- Montrer que **f** est prolongeable par continuité en 0. Donner son prolongement **F**

d-Vérifier que pour tout $x < 0$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{\sin(\pi x)}{x}$

e-En deduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra remarquer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$)

f-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement le résultat

2- Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction **g** continue sur \mathbb{R} vérifiant : $g(0) = 2$ et $g(2) = 0$



a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$

b-Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)}$

c- Montrer que **f** \circ **g** est continue sur $] -\infty, 2 [$.

d-énoncer le théorème des valeurs intermédiaires

e-Montrer que $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[0,2]$.

EXERCICE 2 (4 pts)

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{U}; \vec{V})$

On considère dans \mathbb{C} l'équation $\mathbf{E} : z^2 - 4z - 2\bar{z} + 8 = 0$

1- vérifier que $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ est une solution de \mathbf{E} .

2- Soient \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} les points d'affixes respectives 2 ; α et $\bar{\alpha}$

a- Vérifier que les points \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} appartiennent à un même cercle (\mathbf{c}) dont on précisera le centre et le rayon

b- Construire les points \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C}

3- Soit \mathbf{D} un point de (\mathbf{c}) tel que $(\vec{U}; \overrightarrow{OD}) \equiv \theta [2\pi]$

Placer le point \mathbf{E} d'affixe $\mathbf{z}_E = \alpha e^{i\theta}$

4- Soient \mathbf{F} et \mathbf{G} les milieux respectifs des segments $[\mathbf{BD}]$ et $[\mathbf{CE}]$

a- Justifier que $\mathbf{z}_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et $\mathbf{z}_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$

b- Montrer que $\frac{\mathbf{z}_G - 2}{\mathbf{z}_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$

c- En déduire que le triangle \mathbf{AFG} est équilatéral

EXERCICE 3 (5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{U}; \vec{V})$

Soit \mathbf{I} le point d'affixe 1 , (\mathbf{c}) le cercle de centre \mathbf{O} et de rayon 1 et (\mathbf{c}') le cercle de centre \mathbf{I} et de rayon 1

Soit \mathbf{z} un nombre complexe non nul, \mathbf{M} , \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 les points d'affixes respectives :

\mathbf{z} ; $\mathbf{z}_1 = 1 + iz$ et $\mathbf{z}_2 = 1 - iz$

1- Vérifier que \mathbf{I} est le milieu du segment $[\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2]$

2- Dans cette question, on prendra $\mathbf{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

a- Déterminer la forme trigonométrique de \mathbf{z}

b- Mettre \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 sous forme trigonométrique

c-Montrer que $\overline{\mathbf{MM}_1}$ et $\vec{\mathbf{U}}$ sont colinéaires

d-Montrer que $\mathbf{M}_1 \in (\mathcal{C}')$

e-Construire les points \mathbf{M} ; \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 dans le repère $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{U}}, \vec{\mathbf{V}})$

3-On suppose que $z \neq -i$

a-Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - z\bar{z} + i(z + \bar{z})}{|z_2|^2}$

b-En déduire que : \mathbf{O} ; \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 sont alignées si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$

Et que $\overline{\mathbf{OM}_1}$ et $\overline{\mathbf{OM}_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\bar{z} = 1$

4-a-Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$

b-En déduire à quel ensemble appartiennent les points \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 , lorsque \mathbf{M} décrit (\mathcal{C})

EXERCICE 4 (4 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{U}}, \vec{\mathbf{V}})$

Soit le nombre complexe $z = i + e^{i\theta}$; $\theta \in [0; \pi]$

1-Vérifier que $z = 2\cos\left(\frac{\pi - \theta}{4}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$

2-Pour cette question on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$

a-Ecrire z sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2 = 2 + \sqrt{3}$

b-Ecrire z sous forme exponentielle

c-En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3-Soit les points \mathbf{N} ($e^{i\theta}$), \mathbf{A} ($-i$) et \mathbf{I} (1)

a-Montrer que $\frac{z_{\overline{\mathbf{AN}}}}{z_{\overline{\mathbf{AI}}}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi - \theta}{4}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

b-En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs $\overline{\mathbf{AN}}$ et $\overline{\mathbf{AI}}$ sont orthogonaux

😊😊😊 BON TRAVAIL 😊😊😊