Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** *Mathématiques*	*Niveau : 4 ème Sc exp1*
Date : 12 / 11 / 2018	*Prof : Meddeb Tarek*	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : (7 pts)

1) $a/$ Donner la forme algébrique du nombre complexe $(3+i)^2$.

$b/$ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de nombres complexes l'équation :

$$(E): 2z^2-(1+3i)z-2=0.$$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Donner la forme exponentielle de z_A et de z_B.

3) Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'argument θ, $\theta\in[0\,;\,2\pi[$.

On considère l'application f qui, a tout point M de $\mathscr{C}$ associe le réel $f(M)=MA\times MB$.

$a/$ Soit C le point d'affixe i, calculer $f(C)$.

$b/$ Montrer que pour tout réel α, on a : $e^{2i\alpha}-1=2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

$c/$ Montrer que, pour tout point M de $\mathscr{C}$, on a : $f(M)=\left|e^{2i\theta}-1-e^{i\theta}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)\right|$.

$d/$ En déduire que : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(2\sin\theta-\frac{3}{2}\right)^2}$.

$e/$ Montrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de $\mathscr{C}$ dont on donnera les coordonnées, pour lesquels le réel $f(M)$ est minimal.

Placer M_1 et M_2 sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice n°2 : (6 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, $U_n>0$.

$b/$ Montrer que la suite U est décroissante.

$c/$ En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2) Soit V la suite définie sur IN par : $V_n=\frac{1}{U_n^2}$.

$a/$ Montrer que V est une suite arithmétique.

$b/$ En déduire que, pour tout $n\in IN$, $U_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

3) On pose, pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, $S_n \geq \sqrt{n}$.

$b/$ La suite (S_n) est-elle convergente ?

4) Soient (a_n) et (b_n) les suites définies sur IN^* par : $a_n = 2\sqrt{n} - S_n$ et $b_n = a_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, $2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n \in IN^*$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$c/$ Montrer que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

$d/$ Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

$e/$ Déduire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$.

Exercice n°3 : *(7 pts)*

Soit f la fonction définie sur $IR \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} + 2x & si\ x \in]-\infty\ ;0] \\ \dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} & si\ x \in]0\ ;+\infty[\setminus \{1\} \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x \in]-\infty\ ;0[$, $f(x) = x\left(2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$.

$b/$ Calculer alors $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x)$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;1[$, $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{-\sqrt{x}}{x-1}$, en déduire $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

$b/$ La fonction f est-elle continue en 0 ? justifier.

3) $a/$ Vérifier que, pour tout $x \in]0\ ;+\infty[\setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}(x-1)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}$.

$b/$ Déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4) On pose, pour $x \in]0\ ;+\infty[\setminus \{1\}$, $u(x) = \frac{1}{x} - 1$ et $v(x) = (x+1)\frac{\sin(\pi x)}{x}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;+\infty[\setminus \{1\}$, $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} = v \circ u(x)$.

(On rappelle que : $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$).

$b/$ Calculer alors $\lim_{x \to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}$.

$c/$ En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.