Exercice N °1 (6 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que pour tout x $\in]-\infty;1[$, on a : $\dfrac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x).

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-}$ f(x) =1 (on pourra poser t = x-1).

4) Montrer que f est continue en 1 puis déduire que f est continue sur tout IR.

5) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $\left]\dfrac{-1}{2},0\right[$.

   b) Déduire que sin(πα) = - $\sqrt{1-\alpha^2}$.

6) cCaclucler $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

Exercice N°2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on note les points A , B et I du plan d'affixes respectives $z_A = 1+i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$ et $z_I=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$.

1) a - Mettre les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle .

   b- Vérifier que les points A et B sont deux points du cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 2.

   c- Vérifier que I est le milieu de [AB].

   d- Construire le cercle ($\mathscr{C}$) ainsi que les points A, B et I .

   e- Montrer que Z_A est une racine cubique de -8 et que Z_B est une racine huitième de 256.

2) a- Justifier que la demi droite [OI) est la bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$.

   b- Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

   c- Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OI}}\right)=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

   d-En déduire que $Z_I=\sqrt{2+\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

3) Donner alors les valeurs exactes de cos ($\dfrac{5\pi}{12}$) et sin ($\dfrac{5\pi}{12}$).

4) Montrer que$(Z_I)^{12}\in IR_-$ et $(Z_I)^{120}\in IR_+$.

Exercice N°3 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ (unite graphique 2 cm) représenter les points A , B , C , D et E d'affixes respectifs d'affixe i ,-i ,1-i , 2+i et 1+3i

1) Déterminer la nature du quadrilatère ACDE

2) Soit l'application f définie par f(z) = z' tel que z' $= \dfrac{iz+1}{z+i}$ avec z $\neq$ -i

   Calculer f(1-i) ,f($\dfrac{2-i}{5}$) et $|z'-i||z+i|$.

3) On désigne par M et M' les points du plan d'affixes respectives z et z', Montrer que si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2 alors M' est un point d'un cercle de $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

4) Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus$\{i,-i\} alors arg(z') $\equiv \dfrac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$.

   en déduire que z' est imaginaire pure est équivaut à z est imaginaire pure .

5) Interpréter géométriquement $|z'|$,puis déterminer l'ensemble des points M vérifiant $|z'|$=1.

6) Montrer que z' est réel est équivant a $|z|$=1.

Exercice N°4 *(4 points)*

Soit la suite (U_n) définie par U_o = 2 et $U_{n+1} = \dfrac{U_n^{\,2}-U_n+2}{1+U_n}$.

1)a - Montrer que pour tout n de IN ; $1 < U_n \leq 2$

b- Montrer que la suite U est décroissante .

c- En déduire que la suite U est convergente .

2)a- Montrer que pour tout entier naturel n de IN on a :$0 < U_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{3}(U_n-1)$.

b- Montrer alors que pour tout entier naturel n on a : $0 < U_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.