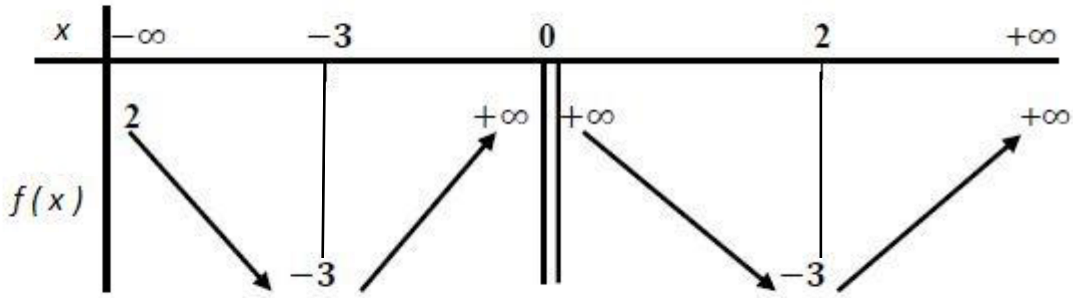
Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 1	4 Sciences EXp 3
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	08 - 11 - 2017

EXERCICE N : 1 (3 points)

Le tableau ci-dessous représente les variations d'une fonction f définie et **dérivable** sur IR* .

On désigne par **(Cf)** la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$.



On suppose que la droite $\Delta : y = 3x + 2$ est une asymptote à **(C f)** au voisinage de $+\infty$ et que la droite **T** : $y = -2x + 1$ est la tangente à **(C f)** au point $A (1 , -1)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)+1}{x-1}$ et $f( ]-\infty ; 0[ )$.

2) Soit les fonctions g et h définies par : $g(x) = 3 + f(x)$ et $h(x) = f \circ g(x)$.

a) Déterminer les domaines de définitions des fonctions g et h .

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ et $h'(1)$.

EXERCICE N : 2 (6.5 points)

On considère la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$

On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty ; 0[$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

b) Prouver alors que f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ puis déterminer $f( ]0 ; +\infty[ )$.

c) Déduire que l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in]0 ; +\infty[$.

4) a) Justifier la continuité de f sur $]-\infty ; 0[$.

b) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet au moins une solution $\beta \in]-2 ; -1[$.

EXERCICE N : 3 (5 points)

1) *Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe :* $\mathbf{a} = -2 + 2i\sqrt{3}$.

2) *Soit* $f(Z) = Z^2 + (1 - 2i\sqrt{3})Z - 2 + 2i\sqrt{3}$ *où Z est un nombre complexe .*

a) *Calculer* $f(1)$.

b) *Déterminer alors les solutions de l'équation* $f(Z) = 0$.

c) *Déduire dans £ les solutions de l'équation :* $Z^4 + (1 - 2i\sqrt{3})Z^2 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

3) *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *. On considère les points*

$A_{(1)}$, $B_{(-2+2i\sqrt{3})}$ *et C d'affixe* Z_C *tel que* $Re(Z_C) = \frac{5}{2}$ *et* $\arg(Z_C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

a) *Placer les points A , B et C (* ***laisser les traces de constructions apparentes*** *) .*

b) *Calculer* $|Z_C|$ *puis déduire que* $Z_C = \frac{5}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

4) a) *Prouver que* $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) *Déduire alors la nature du triangle ABC (Justifier) .*

EXERCICE N : 4 (5.5 points)

I) *Soit m* ***un nombre complexe*** *non nul .*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $Z^2 - 2imZ - (1 + m^2) = 0$.

II) *On suppose dans cette question que* ***m est un réel*** .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $R(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A , M_1 *et* M_2 *d'affixes respectives :* $Z_0 = i$, $Z_1 = im + 1$ *et* $Z_2 = im - 1$

1) *Vérifier que :* $OM_1 = OM_2$.

2) *Montrer que (OA) est la médiatrice du segment* $[M_1M_2]$.

3) *Déterminer les valeurs de m , pour lesquelles le triangle* OM_1M_2 *est équilatéral .*

III) *On suppose dans cette question que :* $\mathbf{m = -ie^{2i\theta}}$ *où* $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) *Déterminer la forme exponentielle de* Z_1 *et* Z_2 *en fonction de* θ .

b) *Donner une mesure de l'angle orienté* $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}})$ *en fonction de* θ .

c) *Déduire la nature du triangle* OM_1M_2 .

2) a) *Montrer que* $\frac{OM_2}{OM_1} = tg(\theta)$.

b) *Déduire la valeur de* θ *pour laquelle* OM_1M_2 *est isocèle .*

Bonne chance