Lycée : D.Toujane | Prof : Mr B.Zayed

Devoir De Contrôle n°1 : (Mathématiques)

A.S : 2015-2016 | $4^{ème}$ Sciences Expérimentales | Durée : 2h

Exercice n°1 : (3pts)

QCM : Cocher la réponse exacte. (Une seule réponse pour chaque question est exacte)

1) Soit le nombre complexe $z = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors : $arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv$

a/ $\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ b/ $\frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$ c/ $-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

2) Le nombre complexe $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est une racine :

a/ Huitième de 1 b/ Sixième de 1 c/ Quatrième de 1

3) Soit (U_n) une suite définie sur ℕ par : $U_n = \frac{n+sinn}{n+1}$ Alors on a :

a/ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ b/ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ c/ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

4) Soit la fonction. $f(x) = xsin\left(\frac{\pi}{x}\right)$; $x \in]0;\ +\infty[$, Alors on a :

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$ b/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice n°2 : (5pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & si\ x \in]-\infty;0[\\ \frac{x^2 sin\left(\frac{2}{x}\right)}{1+x} & si\ x \in]0;+\infty[\end{cases}$

1) a/ Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$ $on\ a : |f(x)| \leq x^2$

b/ En déduire la limite de f à droite en 0.

2) a/ Montrer que pour tout $x \in]-\infty;0[$ $on\ a : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$

b/ En déduire la limite de f à gauche en 0, et que f admet un prolongement par continuité en 0

3) Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x) = f\left(-\sqrt{1+x}\right)$

a/ Montrer que g est continue sur $]-1;+\infty[$

b/ Montrer que l'équation : $g(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans $]0;1[$.

Exercice n°3 : (6pts)

Pour tout nombre complexe z, on définit $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1) a/ Calculer $P(2)$

b/ Déterminer le nombre complexe b tel que : $P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + 4)$

2) a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : P(z) = 0. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E) autres que 2,

z_1 ayant la partie imaginaire positive.

b/ Donner la forme exponentielle de z_1 et z_2.

3) a/ Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\,)$. (unité graphique : 2 cm) les points

A ; B et C, d'affixes respectives 2 ; z_1 et z_2 et le point I milieu de [AB]

b/ Montrer que le triangle OAB est isocèle en O en déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OI}\,)$.

c/ Donner la forme algébrique de z_I l'affixe de I et son module

d/ En déduire les valeurs exacte de $cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice n°4 : (6pts)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4-U_n}\ ;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $on\ a :$ $U_n < 2$

b/ Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c/ En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1}{U_n-2}$

a/ Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son premier terme.

b/ Exprimer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n

c/ Retrouver la limite de (U_n)

Bon travail