Exercice n°1: (7 points)

1) a) Vérifier que : $(\sqrt{3}+i)^2$ = 2+2i$\sqrt{3}$.

b) Résoudre l'équation : $Z^2+(\sqrt{3}-3i)Z-2-2i\sqrt{3}=0$

2) Le plan est munie d'un repère orthonormé directe ($(O,\vec{u},\vec{v})$ .On considère les points A ,B et C d'affixes respectifs $Z_A=2i$, $Z_B=-\sqrt{3}+i$ $et\ Z_c=-Z_B$ et (ς) le cercle de centre O et de rayon 2.

a) Ecrire Z_A , Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

b) Construire les points A,B et C dans le repère.

c) Montrer que ABC est triangle en A.

d) Déterminer l'affixe du point D pour que ABDC soit un rectangle.

3) Soit Δ la droite passant par A et parallèle à (BC) qui recoupe (ς) en un point M d'affixe Z_M.

a) Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que : $Z_M-Z_A=2\alpha Z_C$.

b) Ecrire Z_M sous forme algébrique en fonction de ∝ .

c) Vérifier que $|Z_M|=2$ puis déduire la valeur de α.

Exercice n°2: (7 points)

Soit la fonction définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\frac{x+cosx}{x^2+1} & si\ x\le 0\\ \frac{1}{x+1}-\sqrt{x} & si\ x>0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,0]$ on a : $\frac{x-1}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{x+1}{x^2+1}$

b) Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{x}{x^2+2})$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(\frac{2}{\sqrt{x-2}})$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} fof(x)$

4)a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

vérifier que $0{,}46<\alpha<0{,}47$

c) Monter que $\sqrt{\alpha}=\frac{1}{\alpha+1}$

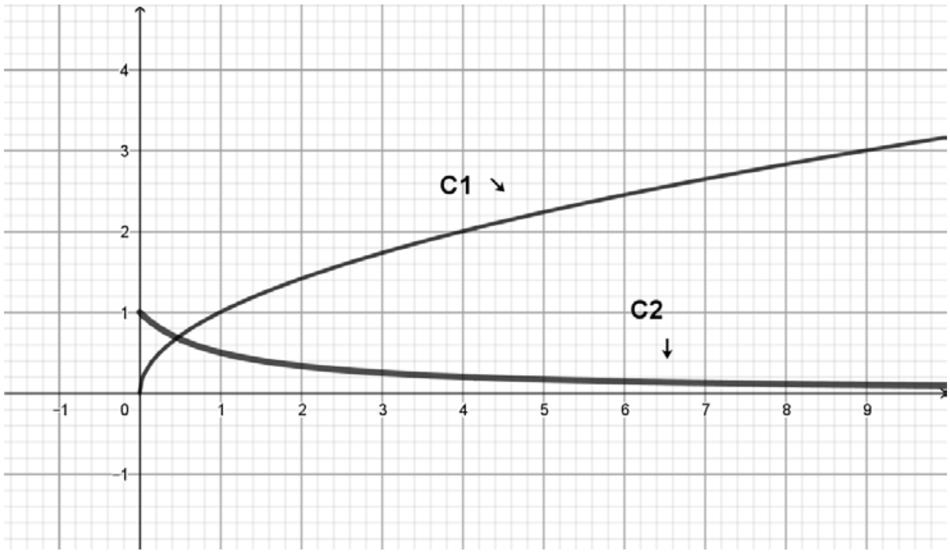
5) On considère les fonctions g et h définies sur $[0,+\infty[$ par g(x) = $\frac{1}{x+1}$ et h(x) =$\sqrt{x}$

Dans le graphique ci dessous on a construit les courbes de g et h.

a) Identifier la courbe de chacune des fonctions en justifiant votre réponse.

b) Déduire l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

c) Dresser graphiquement le tableau de signe de f(x).



<u>Exercice n°3:</u> (6 points)

Soit la suite définie sur IN par $U_0 = 2 \quad et\ U_{n+1} = \frac{4U_n+3}{U_n+2}$

1) a) Montrer que pour tout n on a : $0 \leq U_n \leq 3$

b) Montrer que (U_n) est croissante.

c) Déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.

2) Soit la suite définie sur IN par $V_0 = 4 \quad et\ V_{n+1} = \frac{4V_n+3}{V_n+2}$

a) Montrer que pour tout n on a: $V_n \geq 3$ puis déduire que $U_n \leq V_n$.

b) Montrer que (V_n) est décroissante.

3)a) Montrer que pout tout n on a : $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{5}{(U_n+2)(V_n+2)}(V_n - U_n)$

b) Vérifier en utilisant 1)a) et 2)a) que pour tout n on a : $(U_n + 2)(V_n + 2) \geq 10$.

c) Déduire que pour tout n on a : : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

d) Montrer que pour tout n on a : : $V_n - U_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$

e) Déduire que (U_n) et (V_n) sont adjacentes puis donner la limite de (V_n)

<u>Bon travail</u>