DEVOIR 1

Exercice 1: approximation locale $\dfrac{1}{1-x}$ en 0

1)soit$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Calculer $f'(0)$ et en déduire que :

$f(x) = 1 + x + x\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2)soit $S = 1 + x + x^2 + x^3$, x étant un réel différent de 1.

calculer $S(1-x)$. En déduire une expression de S,puis que :

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3)construire sur un même graphique les courbes représentatives de :

$\dfrac{1}{1-x}, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3$

(tracer uniquement au voisinage du point d'abscisse 0(utiliser une grande échelle (de pompiers)))

4)étudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}, \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1 - x}{x^2}, \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1 - x - x^2}{x^3}$

Exercice 2:

le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$

et de construire sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 1 cm)

1) soit u la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :$u(x) = \dfrac{x(x-1)(x+4)}{(x+1)^3}$

étudier, suivant les valeurs de x, le signe de u.

2)étudier les variations de f.

Vérifiez que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x \quad x + 1 + \dfrac{7}{(x+1)} - \dfrac{3}{(x+1)^2}$

3)soit (D) la droite d'équation :$y = x + 1$

montrer que (D) est asymptote à (C) étudier la position de (C) par rapport à (D)

4)construire (C)

5)en utilisant (C) , déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$x^3 + (3 - m)x^2 + (10 - 2m)x + 5 - m = 0$

DEVOIR 2

TS2 :DM n°2

Exercice 1 :

le but de l'exercice est d'étudier la fonction : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{x + 1}$

1)Déterminer le domaine de définition de f

2)Etudier la dérivabilité de f en 2 et en 5 .

3)Dresser le tableau de variations de f et tracer (C_f)

Exercice 2 :

le but de cet exercice est d'étudier différentes méthodes pour trouver une valeur approchée d'une racine d'un polynôme.

1) soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$.

a)dresser le tableau de variations de P.

b)tracer la courbe représentative de P.

c)en déduire que le polynôme P admet trois racines α, β, γ que l'on encadrera par des entiers consécutifs.

la suite du problème consiste à trouver une valeur approchée de $\beta(\in]1;2[)$.

2)méthode de dichotomie :

soit a et b de nombres réels, tels que P(a) et P(b) soient de signe contraire.on sait que P admet au moins une racine entre a et b .on calcule P($\dfrac{a+b}{2}$).en comparant le signe du résultat obtenu avec les signes de P(a) et P(b) , on peut préciser dans lequel des deux intervalles $]a;\dfrac{a+b}{2}[$ et $]\dfrac{a+b}{2};b[$ se situe la solution cherchée.

on recommence le processus jusqu'à l'obtention de la précision désirée.

utiliser cette méthode pour obtenir une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

3)méthode de Lagrange:

on cherche la solution de l'équation P(x)=0 située dans $]1;2[$

posons x=1+y.cela revient à résoudre P(1+y)=0, avec y$\in]0;1[$.

a)calculer P(1+y).

b)on pose y=$\dfrac{1}{z}$.résoudre P(1+y)=0, avec y$\in]0;1[$,revient à résoudre: P(1+$\dfrac{1}{z}$)=0, avec z$\in]1;+\infty[$

ou encore z^3 P(1+$\dfrac{1}{z}$)=0, avec z$\in]1;+\infty[$.

déterminer le polynôme Q(z)=z^3 P(1+$\dfrac{1}{z}$).

montrer que Q admet une seule racine β' dans $]1;+\infty[$ et que $\beta' \in]5,6[$

exprimer β en fonction de β' et en déduire un encadrement de β.

c)reprendre le même procédé jusqu'à l'obtention d'une valeur approchée de β à 10^{-3} près.(poser z=5+h puis t=$\dfrac{1}{h}$.....)

DEVOIR 3

TS2 :DM n°3

<u>Exercice 1 :</u>

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$z + \dfrac{1}{z} = 1$

$z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$

3) Soit $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1, \forall z \in \mathbb{C}$

a) Vérifier que,pour tout z non nul , on a :

$\dfrac{P(z)}{z^2} = (z + \dfrac{1}{z})^2 . -(1+\sqrt{2})(z + \dfrac{1}{z}) + \sqrt{2}$

b) Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation :$P(z) = 0$.

<u>Exercice 2:</u>

l'objectif de cet exercice est de factoriser un polynôme de degré 4 ,dont on ne connaît pas les racines ,dans $\mathbb{R}$.(incroyable)

Pour réaliser cet exploit nous allons utiliser les nombres complexes.

on considère le polynôme :$P(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10$ avec $x \in \mathbb{R}$

1)déterminer un réel a (le plus simple possible) tel que :

$x^4 + 3x^2 + 6x + 10 - (x^2 + a)^2$ puisse s'écrire sous la forme $(x+b)^2 (b \in \mathbb{R})$

(indication :on raisonnera sur le discriminant du trinôme trouvé....)

2)pour ceux qui ne trouvent pas 1),le résultat est :

$x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = (x^2+1)^2 + (x+3)^2$

en déduire que :

$z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = (z^2 + iz + 1 + 3i)(z^2 - iz + 1 - 3i), \forall z \in \mathbb{C}$

3)vérifier que :$-1 + i$ est solution de $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

en déduire une factorisation de $z^2 + iz + 1 + 3i$ dans $\mathbb{C}$

(on factorisera : $z^2 + iz + 1 + 3i = (z - (-1+i))(z + a + ib)$........)

4)Montrer l'équivalence :

$z^2 - iz + 1 - 3i = 0 \Leftrightarrow \overline{z}^2 + i\overline{z} + 1 + 3i = 0$

en déduire les solutions de $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$

5)les racines complexes de $z^4 + 3z^2 + 6z + 10$ étant :$-1+i, 1-2i, -1-i, 1+2i$,en déduire une factorisation de $z^4 + 3z^2 + 6z + 10$ comme produit de quatre polynômes de degré 1 à coefficients complexes.

enfin ,déduire de ceci une factoisation de P comme produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels .

DEVOIR 4

TS2 :DM n°4

Exercice 1:

(on rappelle la formule: $1+q+q^2+....+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \forall q \in \mathbb{C}^*$)

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

1)calculer z^5

2)On pose : $\alpha = z + z^4$ et $\beta = z^2 + z^3$

Montrer que : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

en déduire que : α et β sont solutions de l'équation: $X^2 + X - 1 = 0$ (1)

3)déterminer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$

4)résoudre (1) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

5)on appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives : $1, z, z^2, z^3, z^4$ dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

a)Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe $(O, \overrightarrow{u})$

Montrer que : $\overline{OH} = \cos\frac{2\pi}{5}$

b)soit (C) le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point B d'affixe i.

Ce cercle coupe $(O, \overrightarrow{u})$ en M et N (M d'abscisse positive)

montrer que : $\overline{OM} = \alpha$ et $\overline{ON} = \beta$ et que H et le milieu de $[OM]$

c)en déduire une construction simple d'un Pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

Exercice 2:

le plan est muni du repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

A tout point M d'affixe $z \neq 0$,on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{z}$

1)a) construire M' quand M a pour affixe :$2(1+i)$

b)soit $A\binom{1}{0}$ et $B\binom{-1}{0}$

montrer (dans le cas général) que la droite (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'})$ et que :$OM * OM' = OA^2$

2)a)vérifier que pour tout z complexe non nul, on a :

$(\frac{z+z'}{2} - 1)(\frac{z+z'}{2} + 1) = (\frac{z-z'}{2})^2$

b)soit I le milieu de $[MM']$. En utilisant a), montrer que :

$IA * IB = IM^2$

(MM') est bissectrice de $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB})$ (pour $M \neq A$ et B)

DEVOIR 5

TS2 :DM n°5

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\dfrac{1}{x}}, \forall x > 0$ et $f(0) = 0$

on note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 5 cm)

partie 1 :

1)démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C)

2)pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. Que peut-on déduire pour f? Pour (C)?

3)démontrer que pour $x > 0$,on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}e^{-\dfrac{1}{x}}$

4)dresser le tableau de variations de f.

partie 2 :

on note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1)montrer que, dans $]0;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.

2)montrer que :$x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle,notée α, dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.

3)On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

donner un encadrement de A à 10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$

4) pour tout $a > 0$, on note (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a.

montrer que (T_α) a pour équation $y = Ax$.

tracer (T_α) et (C)

5)déduire des questions précédentes que, de toutes les tangentes (T_a) , seule (T_α) passe par l'origine du repère.

6)on admettra que (T_α) est au-dessus de (C) sur $]0;+\infty[$

a)par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ (discuter selon les valeurs de m)

b)par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ (discuter selon les valeurs de m)

DEVOIR 6

TS2 DM n°6

<u>exercice 1:</u>

propagation d'une rumeur

une ville compte 10 000 habitants. À huit heures du matin, cent personnes aprennent une nouvelle.

On note $y(t)$ la fréquence des personnes connaissant la rumeur à l'instant t (exprimée en heures).

On choisit 8 heures comme instant initial t=0.

La nouvelle se répand dans la ville de sorte que la vitesse de propagation y'(t) est proportionnelle à la fréquence de ceux qui connaissent la nouvelle et à la fréquence de ceux qui ne la connaissent pas.

On admet que le coefficient de proportionnalité est :1,15.

1)expliquer pourquoi la fonction y est solution de l'équation différentielle :$y' = 1,15y(1-y)$ avec $y(0) = 0,01$.

2)soit z la fonction définie par :$z = \dfrac{1}{y}$ (y ne s'annule pas)

montrer que:$z' = -1,15z + 1,15$.en déduire y(t).

a)dresser le tableau de variation de y et tracer (C_y)

b)en utilisant le graphique donner une approximation de l'instant auquel 99% de la population connaitra la rumeur

<u>exercice 2:</u>

1) soit $f(x) = e^x - 1 - x$.

a)Etudier les variations de f sur $]-\infty;0]$ (on ne demande pas la limite en $-\infty$)

b)En déduire que : $1 + x \leq e^x$, $\forall x \in\ ]-\infty;0]$

2) soit $g(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$

a)Etudier les variations de g sur $]-\infty;0]$

b)En déduire que : $e^x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \in\ ]-\infty;0]$

3)En s'inspirant des questions précédentes,montrer que :

$1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \leq e^x$, $\forall x \in\ ]-\infty;0]$

4)déduire des questions 2) et 3) un encadrement de $e^{-0,01}$ puis de $e^{0,01}$(d'amplitude 2 10^{-7})

<u>exercice 3:</u>

on définit les fonctions sinus et cosinus hyperboliques ainsi: $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

1)Etudier la parité de sh et ch.

2)Dresser le tableau de variations de sh et ch sur $[0;+\infty[$

3)Tracer les courbes représentatives de sh et ch

4)soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = -f(x)$

a)Montrer que f est paire.Etudier la dérivabilité de f en 1 puis dresser son tableau de variations sur $[1;+\infty[$

b)tracer $(C_f) \cup (C_g)$

c)Montrer qu'un point M$\binom{x}{y} \in (C_f) \cup (C_g) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$

d)Montrer que ,pour tout t réel,M$\binom{cht}{sht} \in (C_f) \cup (C_g)$

DEVOIR 7

TS2

DM n°8

<u>Exercice 1:</u> on se propose d'encadrer : $K = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$

1)Soit : $g(x) = e^{-x} + x - 1$ et $h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$

a)étudier les variations de g et h sur $[0;1]$

b)En déduire que : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$,$\forall x \in [0;1]$

2)Déduire du 1) un encadrement de e^{-x^2} sur $[0;1]$ puis montrer que :

$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$,$\forall x \in [0;1]$

3)Montrer que : $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$,$\forall x \in [0;1]$

b)Déduire que : $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$

Donner une valeur approchée de K à $3 * 10^{-2}$ près

<u>Exercice 2:</u>

1)Soit k un entier supérieur à 1.

En encadrant de $\frac{1}{x}$ sur $[k; k+1]$,montrer que :$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$

2)On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$

a)En utilisant le 1)(on prendra $k = 1, 2\ldots.., n$),montrer que :$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n$

b)en déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

<u>Exercice 3:</u>

Soit a un réel strictement positif .

Soit $g(x) = e^{1-x}, \forall x \in \mathbb{R}$.On note (C) sa courbe représentative .

1)faire une étude rapide de g et tracer (C).

2)Soit S_1 l'aire (en unité d'aire) du domaine limité par (C) ,(Ox) et les droites d'équations :$x = 0$ et $x = a$

Calculer S_1 en fonction de a

3)Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$ et B le point de (C) d'abscisse a .La tangente à (C) coupe (Ox) en C.

a)déterminer les coordonnées de C

b)Calculer l'aire S_2 du triangle ABC (en unité d'aire)

c)Montrer que : $S_1 + 2S_2 = e$

<u>Exercice 4:</u>(une petite vacherie pour finir.....)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .pour tout k entier naturel inférieur ou égal à n ,on pose :$I_k = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx$

A l'aide d'une intégrations par parties comparer I_{k+1} et I_k .

En déduire I_k en fonction de n.

DEVOIR 8

TS2

DM n°9

Exercice 1:

on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1)on pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison .

2) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n et u_0.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2:

on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

1)Montrer que : $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2)Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1 .

3)Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3:

On considère la suite d'intégrales :

$I_0 = \int_0^1 \dfrac{dx}{e^x + 1}$, $I_1 = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x + 1} dx$,........... , $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$ $(n \in \mathbb{N})$

1)calculer I_1 et $I_0 + I_1$ .En déduire I_0 .

2)calculer $I_n + I_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

3)Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante .(indication : on cherchera le signe de $I_{n+1} - I_n$ en étudiant le signe de la fonction sous l'intégrale ....)

4)Montrer que : $\forall x \in [0;1]$, $\dfrac{e^{nx}}{e+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x + 1} \leq \dfrac{1}{2} e^{nx}$

en déduire un encadrement de I_n

5)grâce à cet encadrement ,déterminer la limite de I_n et $\dfrac{I_n}{e^n}$

DEVOIR 9

TS2

DM n°9

Exercice 1:

on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1)on pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison .
2) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n et u_0.
En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2:

on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

1)Montrer que : $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2)Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1 .
3)Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3:

On considère la suite d'intégrales :
$I_0 = \int_0^1 \dfrac{dx}{e^x+1}$, $I_1 = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}dx$,........... , $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}dx$ $(n \in \mathbb{N})$
1)calculer I_1 et $I_0 + I_1$ .En déduire I_0 .
2)calculer $I_n + I_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$
3)Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .(indication : on cherchera le signe de $I_{n+1} - I_n$ en étudiant le signe de la fonction sous l'intégrale ....)
4)Montrer que : $\forall x \in [0;1]$, $\dfrac{e^{nx}}{e+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}e^{nx}$
en déduire un encadrement de I_n
5)grâce à cet encadrement ,déterminer la limite de I_n et $\dfrac{I_n}{e^n}$

DEVOIR 10

TS2 :DS n°1

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x\sqrt{x^2+x}$

Exercice 2:

on considère la fonction définie par :$f(x) = \dfrac{x^3+9x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$

on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 2 cm)

1)montrer que f est impaire.que peut-on conclure pour (C)?

2)dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$

(on remarquera que $f'(x)$ est de la forme $(\dfrac{x^2-a}{x^2+1})^2$)

3)on se propose d'apporter quelques précisions pour le tracé de (C)

a)donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b)étudier la position de (C) par rapport à (T).

c)démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que:$f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2+1}$

en déduire que (C) admet une asymptote en $+\infty$ (et $-\infty$)

4)tracer (C) et (T)

Exercice 3:

le but de cet exercice est de déterminer de manière élégante : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-6x^5+5x^6}{(x-1)^2}$

1)vérifier que : $x^6 - 1 = (x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5), \forall x \in \mathbb{R}$

2)calculer la dérivée de : $\dfrac{x^6-1}{x-1}$ (sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$)

3)en déduire que : $\dfrac{1-6x^5+5x^6}{(x-1)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ (pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$)

4)déterminer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-6x^5+5x^6}{(x-1)^2}$

DEVOIR 11

TS2

DS n°2

<u>Exercice 1:</u>

1) on considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par :

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

a)étudier les variations de P.

b)montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une seule racine réelle,notée α,et que :$\alpha \in]1,6;1,7[$

c)en déduire le signe de P

2)on considère la fonction f ,définie sur $]-1;+\infty[$,par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

on notera (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal. (Unité : 4 cm)

a)dresser le tableau de variations de f (on pourra utiliser les résultats du 1))

b)écrire une équation de la droite (D),tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

Étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

c)tracer (C_f) et (D).

<u>Exercice 2:</u>

on considère la fonction définie par :$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}, \forall x \in]-\infty;0] \cup [4:+\infty[$

on notera (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1)montrer que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de (C_f).

2)étudier la dérivabilité de f en 4

3)dresser le tableau de variations de f sur $[4:+\infty[$

4)montrer que (C_f) admet une asymptote en $+\infty$

5)tracer (C_f)

<u>exercice 3 :</u>

le but de l'exercice est d'obtenir un encadrement de $\sqrt{0,999}$

pour cela nous allons utiliser la fonction:$f(x) = \sqrt{1-x}$

1)montrer que: $\forall X \in [0.1], X \leq \sqrt{X}$

en déduire que :$1 - x \leq \sqrt{1-x}, \forall x \in [0.1]$

2)on considère la fonction :$g(x) = \sqrt{1-x} - 1 + \dfrac{x}{2}$

a)étudier le sens de variation de g sur $[0:1]$

b)calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g sur $[0:1]$

c)en déduire que :$\sqrt{1-x} \leq 1 - \dfrac{x}{2}, \forall x \in [0:1]$

3)grâce aux questions précédentes donner un encadrement de $\sqrt{0,999}$.quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

DEVOIR 12

TS2 :DS n°3

Exercice 1:

pour tout nombre complexe Z ,on pose : $P(Z) = Z^4 - 1$

1)factoriser $P(Z)$

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $P(Z) = 0$

3)en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :$(\frac{2z+1}{z-1})^4 = 1$

Exercice 2:

on travaille dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité:2cm)

soit A le point d'affixe 4 et (d) la droite d'équation: $x = 4$

A tout point M ,d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-4}{4-\bar{z}}$

1)a)soit B le point d'affixe $1 + 3i$

déterminer l'affixe du point B' associé à B.placer B et B' sur la figure.

b)soit x un nombre réel différent de 4. On note R le point d'affixe x .

déterminer l'affixe du point R' associé à R.placer R' sur la figure.

c)soit y un nombre réel non nul.On note S le point d'affixe $4 + iy$

déterminer l'affixe du point S' associé à S.placer S' sur la figure.

2)soit M un point d'affixe z n'appartenant pas à (d) et différent de A

a)montrer que : $|z'| = 1$

en déduire que M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

b)Montrer que : $\frac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$

en déduire que (AM) est parallèle à $(S'M')$

(indication:on remarquera que : $(z' - 1) = k(z - 4)$ avec $k \in \mathbb{R}$)

c)en déduire une construction géométrique du point M' .

effectuer cette construction pour le point C' associé au point C d'affixe $2 + i$

Exercice 3:

soit n un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n\sqrt{x - x^2}, \forall x \in [0; 1]$

on notera (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal (unité:10cm).

1)étudier la dérivabilité de f_n en 0 et en 1.

2)calculer $f_n'(x)$,pour $0 < x < 1$, et montrer que :

$f_n'(x)$ et $(2n + 1) - (2n + 2)x$ ont même signe.

3)donner le tableau de variation de f_n (on ne demande pas le calcul du maximum de f_n)

4)étudier les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1})

5)tracer (C_1) et (C_2) dans le repère

DEVOIR 13

TS2

DS n°7

<u>exercice 1:</u>

résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$

2) $e^{x} + 4e^{-x} < 5$

3) $\ln(x+1) + \ln x = 0$

4) $(\frac{x}{2})^{\frac{5}{3}} > 2$

<u>exercice 2:</u>

le but de cet exercice est de résoudre l'équation (E): $2^x + 3^x = 5^x, x \in \mathbb{R}$

1)montrer que (E) est équivalente à : $(\frac{2}{5})^x + (\frac{3}{5})^x = 1$

2)on pose : $f(x) = (\frac{2}{5})^x + (\frac{3}{5})^x$.

a)dresser le tableau de variations de f.(rappel: $a^b = e^{b \ln a}$)

b)montrer que l'équation : $f(x) = 1$ admet une seule solution réelle

c)déterminer la solution de (E).

<u>Exercice 3:</u>

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - \ln|x|$

1)dresser le tableau de variations de f

2)tracer la courbe représentative de f ,notée (C_f)(repère orthonormal :unité 2cm)

3)on coupe (C_f) par la droite d'équation :$y = x + m$ où m est un réel .

on obtient ainsi deux points d'intersection :M_1 et M_2.

soit I le milieu de $[M_1; M_2]$.

quel est l'ensemble des points I ,quand m décrit $\mathbb{R}$?

(indication : on calculera les coordonnées de M_1, M_2 et I)

<u>exercice 4:</u>

on se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - 2y = e^{2x}$.

1)vérifier que la fonction u ,définie par : $u(x) = xe^{2x}$,est solution de (E)

2)on considère une autre équation différentielle (E') :$y' - 2y = 0$

a) résoudre (E')

b) démontrer que : une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E')

c) en déduire les solutions de (E) .

DEVOIR 14

TS2

DS n°7

les exercices suivants peuvent être traités dans un ordre quelconque .(certains sont plus faciles que d'autres).il est par contre essentiel d'expliquer les raisonnements employés et la notation en tiendra compte

exercice 1:

une course cycliste regroupe 10 participants ,supposés de même force, qui portent des dossards numérotés de 1 à 10. Les dix coureurs franchissent successivement la ligne d'arrivée.

qu'elle est la probabilité que les dossards numérotés 1,2,3,4 et 5 arrivent dans les cinq premiers?

Exercice 2:

lors d'une course cycliste, cinq coureurs sont favoris. Ils portent les dossards numérotés de 1 à 5. On estime que la probabilité qu'un de ces cinq coureurs gagne la course est égale à 0,9. D'autre part on suppose que les dossards 1 et 2 ont la même chance de gagner, que les dossards 3, 4 et 5 ont également la même chance de gagner et enfin que le dossard 1 à deux fois plus de chances de gagner que le dossard 3.

quelle est la probabilité de l'événement :'le dossard 1 ou le dossard 3 gagne la course'

exercice 3:

un coureur franchit un secteur pavé délicat lors de la course :'Paris-Roubaix'.s'il choisit une bonne trajectoire, la probabilité de crever est de 0,05. S'il choisit une mauvaise trajectoire, la probabilité de crever est de 0,45.

ayant l'expérience de ce genre de course, la probabilité qu'il choisisse une bonne trajectoire est de 0,9.

1) qu'elle est la probabilité qu'il crève lors du passage de ce secteur.

2)un spectateur belge médusé constate que ce coureur a crevé lors du passage de ce secteur.qu'elle est la probabilité que le coureur ait choisi une mauvaise trajectoire ?

exercice 4:

la course cycliste tire à sa fin. Le sprinter qui porte le dossard numéro 13 est confronté au problème suivant :une échappée vient de partir. Il peut choisir de rester dans le peloton en espérant que celui-ci rattrape l'échappée ou placer un démarrage pour tenter de rejoindre l'échappée.on suppose de plus que s'il rejoint l'échappée, son équipe empêchera le peloton de revenir.

les données sont les suivantes :

la probabilité que le peloton rejoigne l'échappée est 0,9.(dans le cas où il ne fait pas de démarrage comme dans le cas où il fait un démarrage infructueux)

la probabilité qu'il revienne sur l'échappée lors du démarrage est 0,3

s'il rejoint l'échappée la probabilité qu'il gagne au sprint est 0,8

si le peloton rejoint l'échappée, la probabilité qu'il gagne au sprint est 0,4 s'il n'a pas fait de démarrage et 0,25 s'il a fait un démarrage n'ayant pas abouti

1)on suppose dans cette question qu'il ne place pas de démarrage.

quelle est la probabilité que ce coureur gagne la course au sprint ?

2)on suppose maintenant qu'il place un démarrage.

quelle est la probabilité que ce coureur gagne la course au sprint ?

3)quelle tactique doit employer ce coureur réfléchi?

exercice 5:(suite de l'exercice 4)

le malheureux coureur portant le dossard 13 a fait une chute terrible dans le sprint final .il termine finalement 78ème et bon dernier .
c'est maintenant l'heure du controle antidopage .celui ci concernera le premier de la course ,deux autres coureurs parmi les dix premiers et trois autres coureurs dans le reste du peleton .

quelle est la probabilité que le coureur numéro 13 soit tiré au sort pour passer le controle antidopage?

exercice 6:

les trois premiers coureurs à l'issue de la course ,garent leurs vélos devant un café. Après avoir arrosé (un peu trop) leur victoire, ils se dirigent au hasard vers l'une des bicyclettes(deux coureurs ne se dirigeant pas vers la même bicyclette).

quelle est la probabilité pour que

1)chaque coureur trouve sa propre bicyclette?

2)un seul des trois coureurs trouve à sa bicyclette?

3)aucun d'eux ne trouve sa bicyclette?

DEVOIR 15

TS2

DS n°9

Exercice 1:

calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

$\int_0^1 xe^{3x^2}dx$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

Exercice 2:

Soit $f(x) = \frac{1}{x*(x+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$

1)déterminer deux réels a et b tels que :$\frac{1}{x*(x+1)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$

2)En déduire :$\int_1^2 \frac{dx}{x*(x+1)}$

Exercice 3:

Soit $f(x) = x-1+2e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

1)dresser le tableau de variations de f

2)Montrer que (C_f) (courbe représentative de f) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$

3)Soit λ un réel positif .on note $A(\lambda)$ l'aire (en U.A) délimitée par $(C_f), (\Delta)$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$

calculer $A(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

Exercice 4:

1)soit $I = \int_0^1 x^2e^{-x}dx$.à l'aide de deux intégrations par parties successives ,montrer que :

$I = 2-\frac{5}{e}$

2)le but de cette question est d'encadrer $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}}dx$

a)Montrer que : $\forall x \in [0;1] : 0 \leq x^2e^{-x} \leq 1$

b)Montrer que :$\forall X \in [0;1] : 1-X \leq \frac{1}{1+X} \leq 1-\frac{X}{2}$

c)déduire des questions précédentes que : $1-I \leq K \leq 1-\frac{I}{2}$

donner un encadrement de K à $0,1$ prés .

Exercice 5 :

Soit $F(x) = \int_2^x te^t \ln(t-1)dt$, $\forall t \in]1;+\infty[$

1)Etudier les variations de F

2)en déduire le signe de F

DEVOIR 16

TS2

DS n°10

ce devoir comporte douze questions à 1 point .la note sera ensuite ramenée à 20 .

Exercice 1:

barème : une bonne réponse : 1 point .une mauvaise réponse : $-\frac{1}{2}$ point

on considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Vrai ☐ Faux☐ 1) pour tout n , $0 \leq v_n \leq 1$

Vrai ☐ Faux☐ 2) si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

Vrai ☐ Faux☐ 3) si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.

Vrai ☐ Faux☐ 4) si (v_n) est convergente, alors (u_n) est convergente.

Exercice 2:

dans cet exercice, il y a deux réponses correctes à chaque question.Il faut donc essayer de cocher les deux bonnes réponses .Une bonne réponse donne $\frac{1}{2}$ point ,une mauvaise enlève $\frac{1}{4}$ point

On considère trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ tel que :$u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}$

1) si (v_n) tend vers $-\infty$,alors :

☐ (w_n) tend vers $-\infty$

☐ (u_n) tend vers $-\infty$

☐ (u_n) est majorée

☐ (w_n) n'a pas de limite

2) si $u_n > 1$, $w_n = 2u_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l (\in \mathbb{R})$

☐ (v_n) tend vers l

☐ (w_n) tend vers $+\infty$

☐ $(w_n - u_n)$ tend vers l

☐ on ne sait pas dire si (v_n) a une limite ou non

3) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$

☐ (v_n) est majorée

☐ (v_n) tend vers 0

☐ (v_n) peut ne pas avoir de limite

☐ (u_n) et (v_n) ne peuvent pas être adjacentes

Exercice 3:

Dans cet exercice ,il y a une seule réponse bonne à chaque question .une bonne réponse : 1 point .une mauvaise réponse : $-\frac{1}{2}$ point

L'espace est muni d'un repère orthonormal .

1)Soit A et B deux points distincts de l'espace .
l'ensemble des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est :
☐ l'ensemble vide ☐ un plan ☐ une sphère

2)on considère les points $E(0;1;-2)$ et $F(2;1;0)$
les coordonnées de G barycentre de $(E;1)$ et $(F;3)$ sont :
☐ $(6;4;-2)$ ☐ $(1,5;1;-0,5)$ ☐ $(0,5;1;1,5)$

3)Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -3 \end{cases}$
on considère les points $A(2;3;-3)$, $B(2;0;-3)$ et $C(0;6;0)$ .On a :
☐ $d = (AB)$ ☐ $d = (BC)$ ☐ $d \neq (AB), d \neq (BC), d \neq (AC)$

4) Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3 - 2t' \\ y = 7 - 4t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$
ces deux droites sont :☐ parallèles ☐ sécantes ☐ non coplanaires

5)la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ et le plan d'équation
:$x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :
☐ parallèles ☐ orthogonaux ☐ ni parallèles ni orthogonaux

CORRECTION DEVOIR 1

TS2 :DM n°1

<u>Exercice 1:</u> approximation locale $\dfrac{1}{1-x}$ en 0

1)$(\dfrac{1}{1-x})' = -\dfrac{-1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

on a donc :$f'(0) = 1$ d'où :$f(x) = 1 + x + x\varepsilon(x)$,avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(cf cours sur les dérivées)

2)$S(1-x) = (1+x+x^2+x^3)(1-x) = 1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4 = 1-x^4$

on en déduit : $S = \dfrac{1-x^4}{1-x}$ (rq:$x \neq 1$)

donc : $1+x+x^2+x^3+x^3 = \dfrac{1-x^4}{1-x}$ et là on fait apparaitre le fameux $\dfrac{1}{1-x}$

$\Leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^4}{1-x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 + \dfrac{x^4}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 + x^3\dfrac{x}{1-x}$

on obtient bien l'expression demandée avec :$\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$ (et on a bien :$\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$)

le $\varepsilon(x)$ est de plus le même que celui du 1).en effet :

$f(x) = 1+x+x\varepsilon(x) \Leftrightarrow x\varepsilon(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1 - x \Leftrightarrow \varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1-(1+x)(1-x)}{1-x} = \dfrac{1-(1-x^2)}{x(1-x)} = \dfrac{x}{1-x}$

4)pour se débarrasser de ces formes indéterminées, il suffit d'utiliser le résultat du 2)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+x^2+x^3+x^3\varepsilon(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^2+x^3+x^3\varepsilon(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+x^2+x^3+x^3\varepsilon(x)-1-x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x^3+x^3\varepsilon(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 + x + x\varepsilon(x) = 1$

, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1-x-x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+x^2+x^3+x^3\varepsilon(x)-1-x-x^2}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^3\varepsilon(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \varepsilon(x) = 1$

rq:on a obtenu dans cet exercice des fonctions qui "approchent" $\dfrac{1}{1-x}$ de mieux en mieux (au voisinage de 0)

Exercice 2:

1) on remplit un tableau de signes et on trouve que

$u(x)$ est positif sur :$]-\infty;-4]\cup]-1;0]\cup[1;+\infty[$

$u(x)$ est négatif sur $[-4;-1[\cup[0;1]$

2)$f'(x)=(\dfrac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2})'=\dfrac{(3x^2+6x+10)(x+1)^2-(x^3+3x^2+10x+5)2(x+1)}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{(x+1)[(3x^2+6x+10)(x+1)-2(x^3+3x^2+10x+5)]}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{[(3x^2+6x+10)(x+1)-2(x^3+3x^2+10x+5)]}{(x+1)^3}=\dfrac{x^3+3x^2-4x}{(x+1)^3}$ (aprés calcul)

$=\dfrac{x(x^2+3x-4)}{(x+1)^3}=\dfrac{x\,(x+4)\,(x-1)}{(x+1)^3}=u(x)$ (incroyable comme coïncidence)

le signe de u a été traité ci dessus on en déduit donc les variations de f

pour les limites on a:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-1}x^3+3x^2+10x+5=-3$

$x+1+\dfrac{7}{(x+1)}-\dfrac{3}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^3+7(x+1)-3}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$(après calcul)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{(x+1)}-\dfrac{3}{(x+1)^2}=0$ (de même en $-\infty$)

(D) est donc asymptote à (C_f) en $\pm\infty$

étudions maintenant le signe de $f(x)-(x+1)=\dfrac{7}{(x+1)}-\dfrac{3}{(x+1)^2}=\dfrac{7x+4}{(x+1)^2}$

c'est du signe de 7x+4 donc (C_f) est au dessus de (D) sur $[-\dfrac{4}{7};+\infty[$ (et en dessous sur le reste du domaine)

5)

$x^3+(3-m)x^2+(10-2m)x+5-m=0\Leftrightarrow x^3+3x^2+10x+5-m(x^2+2x+1)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}=m\Leftrightarrow f(x)=m$

graphiquement ,il suffit donc de regarder le nombre de points d'intersection de (C_f) et de la droite d'équation $y=m$.

CORRECTION DEVOIR 2

TS2 :DM n°2

Exercice 1 :

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}$ .il faut que :$x+1\neq 0$ et $x^2-7x+10\geq 0$ pour cette deuxième condition, on cherche les racines du polynôme (qui sont :2 et 5) ,et on applique la règle connue (signe de a à l'extérieur des racines)

on obtient donc : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;2]\cup[5;+\infty[$

2)dérivabilité en 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{(x-2)(x-5)}}{(x-2)(x+1)}$$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{2-x}\sqrt{5-x}}{(x-2)(x+1)}$(attention :$x-2$ et $x-5$ sont ici négatifs et on ne peut écrire une racine avec un nombre négatif dessous)

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{2-x}\sqrt{5-x}}{-(2-x)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{5-x}}{-\sqrt{2-x}(x+1)}=-\infty$ car ......

f n'est donc pas dérivable en 2 ((C_f) admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale)

dérivabilité en 5:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(2)}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{\sqrt{(x-2)(x-5)}}{(x-5)(x+1)}$$

$=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-5}}{(x-5)(x+1)}$ (ici, pas de problème)

$=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-5}(x+1)}=+\infty$ .f n'est donc pas dérivable en 5

((C_f) admet au point d'abscisse 5 une demi-tangente verticale)

3)pour $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]5;+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}\right)'=\frac{\dfrac{(2x-7)}{2\sqrt{(x^2-7x+10)}}(x+1)-\sqrt{(x^2-7x+10)}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(2x-7)(x+1)-2\left(x^2-7x+10\right)}{2\sqrt{(x^2-7x+10)}\,(x+1)^2}=\frac{9}{2}\frac{x-3}{\sqrt{(x^2-7x+10)}\,(x+1)^2}$$

$f'(x)$ est donc du signe de :$x-3$

reste les limites :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{10}{x^2})}}{x+1}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{10}{x^2}}}{x(1+\dfrac{1}{x})}=1$ car .....

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2})}}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = -1$ car .....(attention à $x<0$)

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1} = +\infty$ (pas de forme indéterminée)

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1} = -\infty$

et il ne reste plus qu'à remplir le tableau de variations.

<u>Exercice 2 :</u>

1) a)$(x^3-5x^2+2x+3)' = 3x^2-10x+2$.

$\Delta = 100-24 = 76 = 4*19$

les racines sont donc : $x_1 = \dfrac{10-2\sqrt{19}}{6} = \dfrac{5-\sqrt{19}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{19}}{3}$

la dérivée est positive à l'extérieur des racines .

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-5x^2+2x+3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-5x^2+2x+3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

b)

c)pour montrer que le polynôme admet trois racines, il faut utiliser trois fois le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Bien que n'étant pas d'origine belge, le correcteur se contentera de l'utiliser une fois.

sur $]-\infty;\dfrac{5-\sqrt{19}}{3}]$

- P est continue (car c'est une fonction polynôme qui est donc dérivable sur $\mathbb{R}$)
- P est strictement croissante (cf tableau de variations)
- $P(0) = 3 > 0$
- $P(-1) = -3 < 0$ (0 et -1 sont deux valeurs de $]-\infty;\dfrac{5-\sqrt{19}}{3}]$)

on peut donc affirmer que P admet une seule racine dans $]-\infty;\dfrac{5-\sqrt{19}}{3}]$.

on procède de même sur $[\dfrac{5-\sqrt{19}}{3};\dfrac{5+\sqrt{19}}{3}]$ et sur $[\dfrac{5+\sqrt{19}}{3};+\infty[$

($P(1) = 1 > 0$ et $P(2) = -5 < 0$ prouve que $\beta \in [1;2]$)

2)<u>méthode de dichotomie :</u>

$P(1,5) \simeq -1,9; P(1,25) \simeq -0,36; P(1,125) \simeq 0,34; P(1,1875) \simeq -0,001$

$P(1,15625) \simeq 0,17; P(1,171875) \simeq 0,09; P(1,17986875) \simeq 0,04$

$P(1,183684375) \simeq 0,02; P(1,1855921875) \simeq 0,009$et enfin : $P(1,18654509375) \simeq 0,004$

d'où l'on conclut :$1,18654509375 < \beta < 1,1875$. $\beta = 1,187$ à 10^{-3} près

3)méthode de Lagrange:

a) $P(1+y) = (1+y)^3 - 5(1+y)^2 + 2(1+y) + 3 = ... = y^3 - 2y^2 - 5y + 1$

b) $Q(z) = z^3 P(1 + \frac{1}{z}) = z^3((\frac{1}{z})^3 - 2(\frac{1}{z})^2 - 5(\frac{1}{z}) + 1) = z^3 - 5z^2 - 2z + 1$

Q est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $]1; +\infty[$

$Q'(z) = 3z^2 - 10z - 2$. les racines de $3z^2 - 10z - 2$ sont :$\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{31} \simeq -0,18925$ et $\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{31} \simeq 3.5226$

$Q'(z)$ est positif à l'extérieur des racines

on est obligé de procéder en deux fois :

sur $]1; \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{31}[$: $Q(z) < 0$ car $Q(1) = -5$ et Q est décroissante (ça se voit mieux sur le tableau de variations)

sur $]1; \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{31}[$: $Q(5) = -9 < 0$ et $Q(6) = 25 > 0$ .on peut donc affirmer que le polynôme Q s'annule une seule fois dans cet intervalle et plus précisément entre 5 et 6 .

on a eu successivement $x = 1 + y$ et $y = \frac{1}{z}$ .on en déduit donc $x = 1 + \frac{1}{z}$ et en particulier :$\beta = 1 + \frac{1}{\beta'}$

(en effet $Q(\beta') = \beta'^3 P(1 + \frac{1}{\beta'}) = 0$ donc $P(1 + \frac{1}{\beta'}) = 0$ et β est la seule racine de P.......)

on a : $5 < \beta' < 6$ donc $1 + \frac{1}{6} < \beta < 1 + \frac{1}{5}$ $(1 + \frac{1}{6} \simeq 1.,1667; 1 + \frac{1}{5} = 1,2)$

c)$Q(z) = Q(5+h) = (5+h)^3 - 5(5+h)^2 - 2(5+h) + 1 = h^3 + 10h^2 + 23h - 9$ on pose ensuite $h = \frac{1}{t}$ et on multiplie par t^3 pour obtenir :

$R(t) = t^3 Q(5 + \frac{1}{t}) = -9t^3 + 23t^2 + 10t + 1$

on procède de la même manière que précédemment pour montrer que ce polynôme s'annule une seule fois sur $]1; +\infty[$

la racine notée γ est comprise entre 2 et 3 $(R(2) = 41$ et $R(3) = -5)$

de plus $\beta' = 5 + \frac{1}{\gamma}$

on en déduit : $5 + \frac{1}{3} < \beta' < 5 + \frac{1}{2}$ et $1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}} = 1,1818 < \beta < 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}} = 1,1875$

raté de peu.l'encadrement obtenu ne permet pas de conclure à 10^{-3} près.

on peut réitérer le procédé ou plutôt utiliser un encadrement de γ un peu plus précis:

par exemple :$R(2,8) \simeq 11,8$ donc $2,8 < \gamma < 3$ et $1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2,8}} \simeq 1,1867$ ce qui permet de conclure.

CORRECTION DEVOIR 3

TS2 :DM n°3

Exercice 1 :

1) $\Delta = (1+\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1-\sqrt{2})^2$ (ne pas manquer ce carré parfait sinon on ne comprend plus la suite.....)

les solutions sont donc:

$z_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2} = 1$ et $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

2)

- $z + \dfrac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2+1 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

les solutions sont donc :

$z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

- $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{z} = \sqrt{2} \Leftrightarrow z^2+1 = \sqrt{2}z \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

$\Delta = 2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$

les solutions sont donc :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

3) a) $(z+\dfrac{1}{z})^2 . -(1+\sqrt{2})(z+\dfrac{1}{z}) + \sqrt{2} = (\dfrac{z^2+1}{z})^2 - (1+\sqrt{2})\dfrac{z^2+1}{z} + \sqrt{2}$

$= \dfrac{(z^4+2z^2+1) - (1+\sqrt{2})(z^2+1)z + \sqrt{2}z^2}{z^2}$

$= \dfrac{z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1}{z^2} = \dfrac{P(z)}{z^2}$

b) .c'est ici que tout s'enchaîne.

tout d'abord ,notons que 0 n'est pas racine de $P(P(0) \neq 0)$.cela sert dans le raisonnement.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{P(z)}{z} = 0$ (car 0 n'est pas racine de P)

$\Leftrightarrow (z+\dfrac{1}{z})^2 . -(1+\sqrt{2})(z+\dfrac{1}{z}) + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow Z = z + \dfrac{1}{z}$ est solution de :$z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = 1$ ou $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2:

1)$x^4+3x^2+6x+10-(x^2+a)^2=x^4+3x^2+6x+10-(x^4+2ax^2+a^2)$

$=(3-2a)x^2+6x+10-a^2$

$\Delta=36-4(10-a^2)(3-2a)=-8a^3+12a^2+80a-84$

pour obtenir la forme voulue dans l'énoncé,il faut que $\Delta=0$

on obtient une équation de degré 3 mais heureusement 1 est racine évidente.(ouf).on pourrait passer son temps à chercher une autre valeur de a mais quel intérêt?

$x^4+3x^2+6x+10-(x^2+1)^2=....=x^2+6x+9=(x+3)^2$

2)$z^4+3z^2+6z+10=(z^2+1)^2+(z+3)^2$

or on a :$A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$

donc :$z^4+3z^2+6z+10=(z^2+iz+1+3i)(z^2-iz+1-3i)$

3)$(-1+i)^2+i(-1+i)+1+3i=1-2i-1-i-1+1+3i=0$

donc $-1+i$ est solution de $z^2+iz+1+3i=0$

$z^2+iz+1+3i$	$z+1-i$
z^2+z-iz	$z+(2i-1)$
$(2i-1)z+1+3i$	
$(2i-1)z+2i+2-1+i$	
0	

on a donc:$z^2+iz+1+3i=(z+1-i)(z+(2i-1))$

4)$z^2-iz+1-3i=0 \Leftrightarrow \overline{z^2-iz+1-3i}=0 \Leftrightarrow \overline{z}^2+i\overline{z}+1+3i=0$

(en utilisant les propriétés des conjugués......)

$z^2-iz+1-3i=0 \Leftrightarrow \overline{z}^2+i\overline{z}+1+3i=0$

$\Leftrightarrow \overline{z}$ est solution de l'équation :$z^2-iz+1-3i=0$

or les solutions de cette équation sont : $-1+i$ et $1-2i$

on a donc :$\overline{z}=-1+i$ ou $\overline{z}=1-2i \Leftrightarrow z=-1-i$ ou $z=1+2i$

5)d'où: $z^4+3z^2+6z+10=(z+1-i)(z-1+2i)(z+1+i)(z-1-2i)$

on a obtenu une factorisation de ce polynôme dans $\mathbb{C}$

or ,et c'est là l'intérèt de la manoeuvre,ceci est valable pour tout nombre complexe,donc en particulier pour tout nombre réel.on a donc :

$\forall x\in\mathbb{R}: x^4+3x^2+6x+10=(x+1-i)(x-1+2i)(x+1+i)(x-1-2i)$

il ne reste plus qu'à regrouper ces monômes deux par deux .

$\forall x\in\mathbb{R}: x^4+3x^2+6x+10=(x+1-i)(x+1+i)(x-1-2i)(x-1+2i)$

$=(x^2+x+ix+x+1+i-ix-i+1)(x^2-x+2ix-x+1-2i-2ix+2i+4)$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+5)$

la décomposition dans $\mathbb{R}$ s'arrête là car ces deux polynômes n'ont pas de racine réelle (normal,les racines sont les nombres complexes obtenus précédemment)

CORRECTION DEVOIR 5

TS2 :DM n°5

partie 1 :

1) $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

2) $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x^2+x+1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{(\frac{1}{X})^2 + (\frac{1}{X}) + 1}{(\frac{1}{X})^3} e^{-X}$ avec $X = \frac{1}{x}$

on obtient donc : $\lim_{X\to+\infty} ((\frac{1}{X})^2 + (\frac{1}{X}) + 1) X^3 e^{-X} = 0$ car $\lim_{X\to+\infty} X^3 e^{-X} = 0$

on peut en déduire pour f est derivable en 0 avec $f'(0) = 0$

(C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale .

3) $f'(x) = (\frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}})' = \frac{(2x+1)x^2 - (x^2+x+1)2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2+x+1}{x^2} (\frac{1}{x^2}) e^{-\frac{1}{x}}$

$= \frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{-x+1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$

4)$e^{-\frac{1}{x}} > 0$ et $x^4 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+1$ (sur $]0.+\infty[$)

x	0		1		$+\infty$
f'	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}$	$\searrow$	1

partie 2 :

1)$g(x) = f(x) - xf'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - x\frac{-x+1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x(x^2+x+1) - (-x+1)}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$

$= \frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$.

on a donc:$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ car $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$

2)$(x^3 + x^2 + 2x - 1)' = 2x^2 + 2x + 2$. $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$

donc $2x^2 + 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x^3+x^2+2x-1 est donc une fonction strictement croissante et continue.

appelons h cette fonction.on a de plus $h(0)=-1<0$ et $h(1)=3>0$

l'équation $x^3+x^2+2x-1=0$ admet donc une seule racine réelle (comprise entre 0 et 1).on trouve grâce à la machine que:

$h(0,39)\simeq -0,008$ et $h(0,4)\simeq 0,024$ donc $\alpha=0,4$ à 10^{-2} près.

3)f est croissante sur $[0;1]$.Donc :$0,39<\alpha<0,4 \Rightarrow f(0,39)<f(\alpha)<f(0,4)$

on a aussi: $\dfrac{1}{0,4}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,39}$

ces encadrements étant constitués de nombres positifs ,on obtient donc :

$\dfrac{f(0,39)}{0,4}<\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}<\dfrac{f(0,4)}{0,39}$ avec $\dfrac{f(0,39)}{0,4}\simeq 1,9514$ et $\dfrac{f(0,4)}{0,39}\simeq 2,0521$

si l'on veut être rigoureux ,la différence entre ces valeurs approchées étant de $0,1007$ cela ne permet pas de conclure .il faut alors se résigner à obtenir un encadrement de α meilleur que celui proposé dans l'énoncé ,chose que l'aimable lecteur fera sans peine .(le non moins aimable correcteur lui laisse le plaisir de la découverte)

$f'(\alpha)=\dfrac{-\alpha+1}{\alpha^4}e^{-\dfrac{1}{\alpha}}$ et $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3}e^{-\dfrac{1}{\alpha}}$

il s'agit donc de démontrer que :$\dfrac{-\alpha+1}{\alpha^4}=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-\alpha+1}{\alpha}=\alpha^2+\alpha+1 \Leftrightarrow -\alpha+1=\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2+2\alpha-1=0$ ce qui est vrai.(c'est vraiment bien fait)

4)(T_α) a pour équation: $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

or on a :$f'(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ donc $-f'(\alpha)\alpha+f(\alpha)=0$

finalement :$y=f'(\alpha)x=Ax$

5) (T_a) a pour équation :$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

pour que cette droite passe par l'origine il faut et il suffit que :$f'(a)a=f(a)$

un calcul identique à celui fait à la fin du 3) conduira à :$a^3+a^2+2a-1=0$

et ceci donne $a=\alpha$ car α est l'unique solution de cette équation .

6)a) on regarde le nombre de points d'intersection entre (C) et la doite d'équation $y=m$ et on obtient :

- pas de solution pour : $m<0$ ainsi que pour $m>\dfrac{3}{e}$
- une solution pour : $m\in[0;1]$ ainsi que pour $m=\dfrac{3}{e}$
- deux solutions pour : $m\in]1;\dfrac{3}{e}[$

b)on regarde le nombre de points d'intersection entre (C) et la doite d'équation $y = mx$ (qui passe par O).on comprend ici l'utilité du fait que (T_a) passe par O et soit située au dessus de (C) .on obtient :

- une solution (0) lorsque : $m \leq 0$ ou $m > f'(\alpha)$
- deux soutions (0 et α)si : $m = f'(\alpha)$
- trois solutions si : $m \in]0; f'(\alpha)[$

CORRECTION DEVOIR 6

TS2 DM n°6 (corrigé)

exercice 1:

1)dire qu'une expression A est proportionnelle à une expression B, signifie que l'on a : $A = kB$.

or y' est proportionnelle à la fréquence de ceux qui connaissent la nouvelle soit :y et à la fréquence de ceux qui ne la connaissent pas soit $1 - y$

On en déduit que y' peut se mettre sous la forme : $y'(t) = ky(t)(1 - y(t))$

le coefficient k est, d'après l'énoncé, 1,15. D'où le résultat:$y'(t) = 1,15y(t)(1 - y(t))$

de plus, à l'instant 0, cent personnes sur 10 000 connaissent la nouvelle.

La fréquence à l'instant 0 est donc :$y(0) = \dfrac{100}{10000} = 0,01$

2)dire que:$z = \dfrac{1}{y}$ revient à dire que :$y = \dfrac{1}{z}$

or on a :$\left(\dfrac{1}{z(t)}\right)' = 1,15\dfrac{1}{z(t)}\left(1 - \dfrac{1}{z(t)}\right) \Leftrightarrow -\dfrac{z'(t)}{z^2(t)} = \dfrac{1,15(z(t) - 1)}{z^2(t)}$

en simplifiant les dénominateurs, on obtient :$z' = -1,15z + 1,15$

cette équation différentielle admet comme solutions: $z(t) = Ce^{-1,15t} + 1$ $(C \in \mathbb{R})$

on a donc : $y(t) = \dfrac{1}{Ce^{-1,15t} + 1}$

la condition $y(0) = 0,01$ va nous permettre de calculer C.

$y(0) = 0,01 \Leftrightarrow \dfrac{1}{Ce^0 + 1} = 0,01 \Leftrightarrow C + 1 = 100 \Leftrightarrow C = 99$

finalement : $\boxed{y(t) = \dfrac{1}{99e^{-1,15t} + 1}}$

$y'(t) = -\dfrac{-99 * 1,15e^{-1,15t}}{(99e^{-1,15t} + 1)^2} = \dfrac{113,85e^{-1,15t}}{(99e^{-1,15t} + 1)^2} > 0$ car $e^X > 0, \forall X \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{99e^{-1,15t} + 1} = 1$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-1,15t} = \lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$

d'où le tableau :

t	0	$+\infty$
y'	$+$	
y	0 $\nearrow$	$+\infty$

b)voici comment on procéderait pour résoudre cette inéquation par le calcul.

$y(t) > 0,99 \Leftrightarrow \dfrac{1}{99e^{-1,15t} + 1} > 0,99 \Leftrightarrow 99e^{-1,15t} + 1 < \dfrac{1}{0,99}$

$\Leftrightarrow 99e^{-1,15t} < \dfrac{1}{0,99} - 1 \Leftrightarrow e^{-1,15t} < \dfrac{1}{99}\left(\dfrac{1}{0,99} - 1\right)$

$\Leftrightarrow -1,15t < \ln\left(\dfrac{1}{99}\left(\dfrac{1}{0,99} - 1\right)\right) \Leftrightarrow t > -\dfrac{1}{1,15}\ln\left(\dfrac{1}{99}\left(\dfrac{1}{0,99} - 1\right)\right)$ (soit $\simeq 7,99$)

exercice 2:

1) soit $f(x) = e^x - 1 - x$.

a) $f\,'(x) = e^x - 1$

or : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$

b)on a donc :

x	$-\infty$	0
f'	$-$	0
f	$\searrow$	0

cela entraîne que:$e^x - 1 - x \geq 0, \forall x \in]-\infty; 0] \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x, \forall x \in]-\infty; 0]$

2) a) $g'(x) = e^x - 1 - x = f(x)$

or, d'après la question précédente, $f(x)$ est positif sur $]-\infty; 0]$

on déduit que g est croissante sur $]-\infty; 0]$

b)on a donc :

x	$-\infty$	0
g'	$+$	0
g	$\nearrow$	0

on en déduit que :$e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \leq 0$ soit $e^x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \in]-\infty; 0]$

3)posons $h(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})$

on a donc : $h'(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2}) = g(x)$ d'où le tableau :

x	$-\infty$	0
h'	$-$	0
h	$\searrow$	0

cela entraîne que:$e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) \geq 0, \forall x \in]-\infty; 0]$

$\Leftrightarrow e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \forall x \in]-\infty; 0]$

4)on a obtenu :$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in]-\infty; 0]$

appliquons cet encadrement avec $x = -0,01$(possible car x est négatif)

$1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2} - \frac{0,01^3}{6} \simeq 0,990049833$

$1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2} \simeq 0,99005$ et $0,99005 - 0,990049833 < 2 * 10^{-7}$

donc $e^{-0,01} \simeq 0,99005$ à $2 * 10^{-7}$ près

pour $e^{0,01}$ il n'est pas question d'utiliser cet encadrement valable uniquement pour des nombres négatifs.

On peut par contre raisonner ainsi : $1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2} - \frac{0,01^3}{6} < e^{-0,01} < 1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2}$

donc $\frac{1}{1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2}} < e^{0,01} < \frac{1}{1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2} - \frac{0,01^3}{6}}$

$\frac{1}{1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2}} \simeq 1,010049997$ et $\frac{1}{1 - 0,01 + \frac{0,01^2}{2} - \frac{0,01^3}{6}} \simeq 1,010050168$

la différence entre ces deux nombres étant inférieure à $2 * 10^{-7}$,on a donc :

$e^{0,01} \simeq 1,01005$ (qui est un nombre assez simple compris entre les deux bornes de l'encadrement)

<u>exercice 3:</u>

1)$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -sh(x), ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$

sh est impaire ,ch est paire

2)$sh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ car $e^x > 0, \forall x \in [0; +\infty[$

(on remarquera, médusé, que la dérivée de sh est ch)

$\lim\limits_{x \to +\infty} shx = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

$ch'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (= shx .cet exercice est vraiment médusant)

$ch'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} chx = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

3)

4)a)$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (en utlisant $\frac{\sqrt{X}}{X} = \frac{1}{\sqrt{X}}$...)= $+\infty$

f n'est donc pas dérivable en 1 (tangente verticale pour (C_f) au point d'abscisse 1)

pour $x > 1$: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} > 0$ car ....

d'où

x	1	0
f'	$\Vert$ $+$	
f	0 $\nearrow$	$+\infty$

c) $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$ ou $y = -\sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow$M$\binom{x}{y} \in (C_f) \cup (C_g)$

d)$ch^2x - sh^2x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$donc M$\binom{cht}{sht} \in (C_f) \cup (C_g)$ d'aprés c)

ORRECTION DEVOIR 7

TS2

DM n°8

<u>Exercice 1:</u>

1)a) et b)$g'(x) = -e^{-x} + 1$.

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$.$g$ est donc croissante sur $[0;1]$

$h'(x) = -1 + x + e^{-x} = g(x)$

or g est croissante sur $[0;1]$ et de plus $g(0) = 0$.on peut donc affirmer que g est positive sur $[0;1]$ et donc h est croissante sur $[0;1]$
on a également $h(0) = 0$ ce qui entraine aussi que h est positive sur $[0;1]$
On a donc pour tout x de $[0;1]$

$g(x) \geq 0 \Rightarrow e^{-x} + x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \leq e^{-x}$

$h(x) \geq 0 \Rightarrow 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

2)soit $x$dans $[0.1]$.Alors x^2 appartient également à $[0;1]$.on peut donc lui appliquer le résultat du 1) et on obtient :

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$

en divisant cet encadrement par $1 + x$ qui est positif on obtient :

$\frac{1 - x^2}{1 + x} \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2}}{1 + x}$ ce qui donne :

$$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1 + x)}$$

3)a)$x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1 + x} = \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x^3 + x + x^2 - 1 - x + 1}{1 + x} = \frac{x^4}{1 + x}$

b)prenons l'encadrement du 2) et intégrons le entre 0 et 1 (ce qui est possible puisque l'encadrement a été établi sur $[0;1]$).cela donne :

$\int_0^1 1 - x dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1 + x} dx \leq \int_0^1 1 - x + \frac{x^4}{2(1 + x)} dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 1 - x dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1 + x} dx \leq \int_0^1 1 - x + \frac{1}{2}(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1 + x}) dx$

d'aprés a)

$\Leftrightarrow [x - \frac{x^2}{2}]_0^1 \leq K \leq [x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1 + x)]_0^1$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq K \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq K \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$.soit $0,5 \leq K \leq \simeq 0,555$.donc $K = 0,53$ à $3 * 10^{-2}$ près

<u>Exercice 2:</u>

1)$\forall x \in [k, k + 1]$ on a : $\frac{1}{k + 1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

d'après l'inégalité de la moyenne (c'est à dire en intégrant cet encadrement),on obtient :

$\frac{1}{k + 1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ (puisque l'amplitude de l'intervalle est 1)

2)appliquons le résultat du 1) :

pour $k=1$: $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq 1$
pour $k=2$: $\frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2}$
pour $k=3$: $\frac{1}{4} \leq \int_3^4 \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{3}$

etc.....

pour $k=n$: $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n}$
il suffit ensuite d'ajouter ces encadrements et on obtient :(grace à Chasles)
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.......+\frac{1}{n+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.......+\frac{1}{n}$
la deuxième inégalité est le résultat demandé .
3)$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1)$
or $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ .par comparaison on obtient :
$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.......+\frac{1}{n} = +\infty$

Exercice 3:
1)$g'(x) = -e^{1-x} < 0$ car une exponentielle est toujours positive .
$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$
2)puisque g est positive sur $[0;a]$,on a :
$S_1 = \int_0^a e^{1-x}dx = [-e^{1-x}]_0^a = -e^{1-a}+e$
3)a)la tangente à (C) en B a pour équation :
$y = g'(a)(x-a)+g(a) = -e^{1-a}(x-a)+e^{1-a}$
C étant à l'intersection de cette tangente et de (Ox) ,on est amené à résoudre :
$-e^{1-a}(x-a)+e^{1-a} = 0 \Leftrightarrow -e^{1-a}x = -ae^{1-a}-e^{1-a} \Leftrightarrow x = a+1$
C a pour coordonnées $\binom{a+1}{0}$
$S_2 = \frac{base * hauteur}{2} = \frac{1 * e^{1-a}}{2} = \frac{e^{1-a}}{2}$ (en prenant comme base [A;C])
b)$S_1+2S_2 = -e^{1-a}+e+e^{1-a} = e$

Exercice 4:
$I_{k+1} = \int_0^1 \binom{n}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}dx$
posons :$u'(x) = (1-x)^{n-k-1}$ et $v(x) = x^{k+1}$
on obtient donc : $u(x) = \frac{-(1-x)^{n-k}}{n-k}$ et $v'(x) = (k+1)x^k$
donc : $I_{k+1} = [\frac{-(1-x)^{n-k}}{n-k} * x^{k+1}]_0^1 - \int_0^1 \binom{n}{k+1} \frac{-(1-x)^{n-k}}{n-k} * (k+1)x^k dx$
le crochet vaut 0 .De plus :$\binom{n}{k+1} * \frac{1}{n-k} * (k+1) = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k}$
or $(k+1)! = (k+1)*k!$ donc $\frac{k+1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}$
et on a de même :$(n-k-1)! * (n-k) = (n-k)!$
on obtient donc aprés simplification : $I_{k+1=} \int_0^1 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k}dx = I_k$
Notons pour être précis que ce calcul n'est pas valable pour $k=n$ (à cause d'un dénominateur..)

Nous avons donc obtenu que :$I_0 = I_1 = I_2 = ... = I_n$ (il suffit d'utliser le résultat précédent pour $k = 0, k = 1, ..., k = n - 1$)
de plus I_0 est simple à calculer :
$I_0 = \int_0^1 \binom{n}{0} x^0 (1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^n dx = [\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}]_0^1 = 0 - (\frac{-1}{n+1})$
finalement $I_k = \frac{1}{n+1}$ pour tout k compris entre 0 et n .

CORRECTION DEVOIR 8

TS2

DM n°9 (corrigé)

Exercice 1:

1) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}}{\dfrac{u_n-3}{u_n+1}} = \dfrac{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}+1}\dfrac{u_n+1}{u_n-3} = \dfrac{\dfrac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{5u_n+3+u_n+3}{u_n+3}}\dfrac{u_n+1}{u_n-3}$

$= \dfrac{2u_n-6}{6u_n+6}\dfrac{u_n+1}{u_n-3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

(v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

2) $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \Leftrightarrow v_n(u_n+1) = u_n-3 \Leftrightarrow v_nu_n - u_n = -v_n-3 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{-v_n-3}{v_n-1}$

rq:il convient de s'assurer ,pour la validité du calcul ,que le dénominateur n'est pas nul .Ce qui va suivre en est une preuve .

on sait que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.On a donc:

$v_n = (\dfrac{1}{3})^n v_0 = (\dfrac{1}{3})^n\dfrac{u_0-3}{u_0+1} = -(\dfrac{1}{3})^n$ (et donc $v_n \neq 1$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-v_n-3}{v_n-1} = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -(\dfrac{1}{3})^n = 0$

Exercice 2:

1)par récurrence :

$u_0 = 2 > 0$

supposons que : $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} > 0$

2)$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} - u_n = \dfrac{1+u_n^2-2u_n^2}{2u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{2u_n}$

si l'on montre que $u_n \geq 1$,on aura alors : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .Montrons le:.

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} - 1 = \dfrac{1+u_n^2-2u_n}{2u_n} = \dfrac{(1-u_n)^2}{2u_n} \geq 0$ car $u_n > 0$

cela permet d'affirmer que : $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ .En effet si l'on applique ceci pour $n = 0, 1, 2...etc$ on obtient le résultat voulu pour $u_1, u_2, u_3......$ .ceci dit ce n'est pas trés génant car on a aussi : $u_0 = 2 > 1$

nous avons donc montré que (u_n) est minorée par 1 et donc est aussi décroissante .

3) (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente vers $l \geq 1$

on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ Or $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n}$ donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} = \dfrac{1+l^2}{2l}$

---

on obtient alors : $l = \dfrac{1+l^2}{2l} \Leftrightarrow 2l^2 = 1 + l^2 \Leftrightarrow l^2 = 1 \Leftrightarrow l = 1$ (car $l \geq 1$ et donc $l \neq -1$)

Exercice 3:

1) $I_1 = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln \dfrac{e+1}{2}$

$I_0 + I_1 = \int_0^1 \dfrac{dx}{e^x+1} + \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{e^x+1}{e^x+1}dx = \int_0^1 1dx = 1$

donc : $I_0 = I_0 + I_1 - I_1 = 1 - \ln \dfrac{e+1}{2}$.

2) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}dx + \int_0^1 \dfrac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx$

$= \int_0^1 \dfrac{e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1}dx = \int_0^1 e^{nx}dx = [\dfrac{e^{nx}}{n}]_0^1 = \dfrac{e^n-1}{n}$

notons que ce calcul n'est pas valable pour $n = 0$ (cas traité au 1))

3) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx - \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{e^{(n+1)x}-e^{nx}}{e^x+1}dx$

$= \int_0^1 \dfrac{e^{nx}(e^x-1)}{e^x+1}dx$

or on a : $e^{nx} > 0, e^x + 1 > 0$ et $e^x - 1 \geq 0, \forall x \in [0;1]$ car $e^x \geq e^0 = 1$

la fonction à intégrer étant positive sur l'intervalle d'intégration ,cette intégrale est positive .D'où:$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

4) $\forall x \in [0;1]$, $e^0 \leq e^x \leq e^1$ donc $2 \leq e^x + 1 \leq e + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e+1} \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}$

il suffit alors de multiplier par e^{nx} (qui est positif) et on obtient :

$\dfrac{e^{nx}}{e+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{2}$

cet encadrement étant valable sur $[0;1]$,cela entraine :$\int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e+1}dx \leq \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}dx \leq$ $\int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{2}dx$

donc : $[\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{nx}}{e+1}]_0^1 \leq I_n \leq [\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{nx}}{2}]_0^1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{e+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{2}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{e+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{e+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$

on obtient donc par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$

d'aprés 4) :$\dfrac{\dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{e+1}}{e^n} \leq \dfrac{I_n}{e^n} \leq \dfrac{\dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{2}}{e^n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{e+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{2}$

cela entraine que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{e+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{2} = 0$ (facile à justifier ......)

CORRECTION DEVOIR 10

TS2 :DS n°1(corrigé)

Note à bénet :le correcteur lassé du clavier a raccourci quelques calculs que le lecteur pourra effectuer sans difficulté.....

Exercice 1: (barème :1-2-2-2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+2}{x^2+x+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$ car .....

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x\sqrt{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x\sqrt{x^2+x})\dfrac{x^2+x\sqrt{x^2+x}}{x^2+x\sqrt{x^2+x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-x^2(x^2+x)}{x^2+x\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3}{x^2+x\sqrt{x^2+x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3}{x^2(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}})}$ (on factorise par x^2 sous la racine)

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} = -\infty$ car ......

Exercice 2: (barème :1)0,5 2)3 3)a)0,5 b)2 c)1,5 4)1,5)

1) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3+9(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3-9x}{x^2+1} = -f(x)$

f est donc impaire.(C) est symétrique par rapport à O(origine du repère)

2) $f'(x) = \dfrac{(3x^2+9)(x^2+1)-(x^3+9x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4-6x^2+9}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}$

on en déduit donc que $f'(x)$ est toujours positive (les carrés étant positifs)

f est donc croissante sur $[0;+\infty[$

pour remplir le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ il ne reste plus qu'à calculer :

$f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

3)a)(T) a pour équation : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y = 9x$

b)il faut étudier le signe de :$f(x)-9x = \dfrac{x^3+9x-9x(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{-8x^3}{x^2+1}$ du signe de $-x^3$

donc : (C) est au dessus de (T) sur $]-\infty;0]$ et au dessous sur $[0;+\infty[$

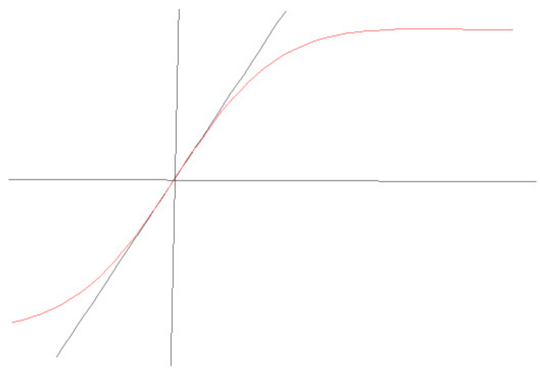
c)$ax+\dfrac{bx}{x^2+1} = \dfrac{ax(x^2+1)+bx}{x^2+1} = \dfrac{ax^3+(a+b)x}{x^2+1}$

il faut donc que : $\begin{cases} a=1 \\ a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=8 \end{cases}$ et on a: $f(x)=x+\dfrac{8x}{x^2+1}$

on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{x} = 0$

la droite d'équation $y=x$ est donc asymptote à (C) en $+\infty$

4)(faute de place le correcteur épuisé se permet de prendre un repère non orthonormal)



<u>Exercice 3:</u> (barème : 1)0,5 2)1,5 3)1 4)1)

1)$(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) = x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6-1-x-x^2-x^3-x^4-x^5 = x^6-1$

2)$(\dfrac{x^6-1}{x-1})' = \dfrac{6x^5(x-1)-(x^6-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{1-6x^5+5x^6}{(x-1)^2}$

3)d'après 1) on a :$\dfrac{x^6-1}{x-1} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ (pour $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$)

or $(\dfrac{x^6-1}{x-1})' = \dfrac{1-6x^5+5x^6}{(x-1)^2}$

et $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)' = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$

donc :$\dfrac{1-6x^5+5x^6}{(x-1)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ (pour $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$)

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-6x^5+5x^6}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1} 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 = 15$

CORRECTION DEVOIR 11

TS2 :DS n°3 (corrigé)

Exercice 1:

1) $Z^4 - 1 = (Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = (Z - 1)(Z + 1)(Z^2 + 1)$

2)$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - 1 = 0$ ou $Z + 1 = 0$ ou $Z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow Z = 1, -1, i$ ou $-i$ (la dernière équation étant :$Z^2 = -1$)

3)Posons $Z = \dfrac{2z+1}{z-1}$on a donc $Z^4 = 1$

d'après 2) cela donne $Z = 1, -1, i$ ou $-i$

$Z = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow 2z + 1 = z - 1 \Leftrightarrow z = -2$

$Z = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = -1 \Leftrightarrow 2z + 1 = -z + 1 \Leftrightarrow z = 0$

$Z = i \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = i \Leftrightarrow 2z + 1 = iz - i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1-i}{2-i} = \dfrac{(-1-i)(2+i)}{4+1} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

$Z = -i \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = -i \Leftrightarrow 2z+1 = -iz+i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+i}{2+i} = \dfrac{(-1+i)(2-i)}{4+1} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

Exercice 2:

1)a)$b' = \dfrac{b-4}{4-\overline{b}} = \dfrac{1+3i-4}{4-(1-3i)} = \dfrac{-3+3i}{3+3i} = \dfrac{(-3+3i)(3-3i)}{9+9} = i$

b)$r' = \dfrac{x-4}{4-\overline{x}} = \dfrac{x-4}{4-x} = -1$

c)$s' = \dfrac{4+iy-4}{4-\overline{(4+iy)}} = \dfrac{iy}{4-4+iy} = 1$

2)a)$|z'| = \left|\dfrac{z-4}{4-\overline{z}}\right| = \dfrac{|z-4|}{|4-\overline{z}|}$

or on sait que :$\left|\overline{Z}\right| = |Z|$

donc $|4-\overline{z}| = \left|\overline{4-\overline{z}}\right| = |4-z| = |z-4|$ (on peut changer le signe,le module ne change pas)

finalement on a bien :$|z'| = 1$

(une autre méthode était de poser :$z = x + iy$)

on en déduit :$OM' = 1$ donc $M' \in C(O;1)$

b) $\dfrac{z'-1}{z-4} = \dfrac{\dfrac{z-4}{4-\overline{z}} - 1}{z-4} = \dfrac{\dfrac{z-4-(4-\overline{z})}{4-\overline{z}}}{z-4} = \dfrac{z+\overline{z}-8}{(z-4)(4-\overline{z})}$

or $z + \overline{z} - 8 = x + iy + x - iy - 8 = 2x - 8 \in \mathbb{R}$

et $(z-4)(4-\overline{z}) = -(z-4)(\overline{z}-4) = -|z-4|^2 \in \mathbb{R}$(en utilisant:$Z\overline{Z} = \left|Z^2\right|$)

(sinon on peut aussi poser $z = x + iy$.......)

---

finalement $\dfrac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$

donc: $\dfrac{z'-1}{z-4} = k \in \mathbb{R}$ soit $z'-1 = k(z-4)$

et on obtient:$\overrightarrow{S'M'} = k\overrightarrow{AM}$ .Cela entraîne :$(S'M')//(AM)$

c)M' se trouve donc à l'intersection du cercle $C(O;1)$ et de la parallèle à (AM) passant par S'.Un cercle et une droite ,lorsqu'ils sont sécants, se coupent en deux points .cela laisse deux possibiltés à M' .or un des deux points d'intersection est S' .et $M' \neq S'$

Exercice 3:

1)$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n\sqrt{x-x^2}}{x}\ \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}\sqrt{x-x^2} = 0$ car .....

f_n est donc dérivable en 0 (et $f_n'(0)=0$)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n\sqrt{x(1-x)}}{x-1}\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n\sqrt{x}}{-\sqrt{1-x}} = -\infty$ car .....

(écrire ,pour le dénominateur :$x-1 = -(1-x) = -(\sqrt{1-x})^2$)

f_n n'est donc pas dérivable en 1

2) $f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{x-x^2} + x^n\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{nx^{n-1}2(x-x^2)+x^n(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}$

$= \dfrac{x^{n-1}(2nx-2nx^2+x-2x^2)}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{x^n(2n+1-x(2n+2)}{2\sqrt{x-x^2}}$

du signe de $(2n+1)-(2n+2)x$ car x^n et $2\sqrt{x-x^2}$ sont positifs ($x\in[0;1]$)

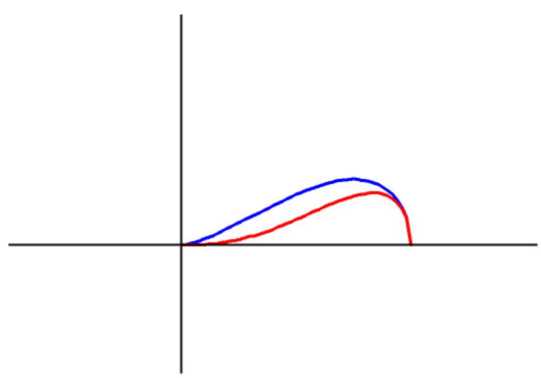
3)

x	0		$\dfrac{2n+1}{2n+2}$		1
f_n'	0		0		$\Vert$
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

4)$f_{n+1}(x)-f_n(x) = x^{n+1}\sqrt{x-x^2} - x^n x - x^2 = x^n\sqrt{x-x^2}(x-1)$

ceci est toujours négatif sur [0;1] ($x^n \geq 0, \sqrt{x-x^2} \geq 0, 1-x \leq 0$)

Donc (C_{n+1}) est en dessous de (C_n)



CORRECTION DEVOIR 13

TS2

DS n°7

<u>exercice 1:</u>

1) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

posons $X = e^x$ .on obtient :$X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow X = 3$ ou $X = -2$

$e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$ et $e^x = -2$ est imposible car $e^x > 0$. $\boxed{S = \{\ln 3\}}$

2) $e^x + 4e^{-x} < 5$

posons $X = e^x$ .on obtient : $X + \dfrac{4}{X} < 5 \Leftrightarrow X + \dfrac{4}{X} - 5 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{X^2 - 5X + 4}{X} < 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 < 0$ car $X = e^x > 0$

$X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 4$

$X^2 - 5X + 4 < 0$ pour $1 < X < 4 \Leftrightarrow 1 < e^x < 4 \Leftrightarrow \boxed{0 < x < \ln 4}$

3) $\ln(x + 1) + \ln x = 0$

il faut que :$\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

on obtient : $\ln(x(x + 1)) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ mais $x_2 < 0$. $\boxed{S = \{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\}}$

4) notons que x doit être positif .

$(\dfrac{x}{2})^{\frac{5}{3}} > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{5}{3}\ln(\frac{x}{2})} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}\ln(\dfrac{x}{2}) > \ln 2 \Leftrightarrow \ln(\dfrac{x}{2}) > \dfrac{3}{5}\ln 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} > e^{\frac{3}{5}\ln 2} \Leftrightarrow x > 2 * 2^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > 2^{\frac{8}{5}}$

<u>exercice 2:</u>

1) $2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{5^x} + \dfrac{3^x}{5^x} = 1 \Leftrightarrow (\dfrac{2}{5})^x + (\dfrac{3}{5})^x = 1$

2)a) $f'(x) = (e^{x\ln\frac{2}{5}})' + (e^{x\ln\frac{3}{5}})' = \ln\dfrac{2}{5}e^{x\ln\frac{2}{5}} + \ln\dfrac{3}{5}e^{x\ln\frac{3}{5}}$

or :$e^X > 0$ et $\ln\dfrac{2}{5} < 0$ et $\ln\dfrac{3}{5} < 0$.donc $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{2}{5}} + e^{x\ln\frac{3}{5}} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{2}{5} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{3}{5} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln\frac{2}{5}} + e^{x\ln\frac{3}{5}} = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln\dfrac{2}{5} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\ln\dfrac{3}{5} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

b)f est strictement décroissante et continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$.

de plus $f(0) = 2 > 1$ et $f(2) = \dfrac{13}{25} < 1$

donc l'équation $f(x) = 1$ admet une seule solution réelle

c)grâce à un flair digne d'un pointer ,on trouve : $\boxed{x = 1}$

<u>Exercice 3:</u>

1) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		0	$+$	
x		$-$		$+$			$+$	
f'		$+$	$\|$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln|x| = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \dfrac{\ln x}{x}) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x - \ln|x| = -\infty$ (pas de forme indéterminée)

$\lim\limits_{x\to 0} x - \ln|x| = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$

3)tout d'abord :$f(x) = x + m \Leftrightarrow x - \ln|x| = x + m \Leftrightarrow \ln|x| = -m$
$\Leftrightarrow |x| = e^{-m} \Leftrightarrow x = e^{-m}$ ou $x = -e^{-m}$

on en déduit : $M_1\begin{pmatrix} -e^{-m} \\ -e^{-m} + m \end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix} e^{-m} \\ e^{-m} + m \end{pmatrix}$

d'où il vient : $I\begin{pmatrix} \dfrac{-e^{-m} + e^{-m}}{2} \\ \dfrac{-e^{-m} + m + e^{-m} + m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$

lorsque m décrit $\mathbb{R}$,I décrit donc (Oy)

<u>exercice 4:</u>

1)il suffit de remplacer $u(x) = xe^{2x}$ dans (E)
$u'(x) - 2u(x) = (e^{2x} + x * 2e^{2x}) - 2xe^{2x} = e^{2x}$ cqfd

2)a) les solutions de (E') sont du type : Ce^{2x} (C étant un nombre réel)

b) v est solution de (E)$\Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = e^{2x} \Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x)$
$\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) - 2(v(x) - u(x)) = 0 \Leftrightarrow v - u$ est solution de (E')

c) v est solution de (E)$\Leftrightarrow v - u$ est solution de (E')
$\Leftrightarrow v(x) - u(x) = Ce^{2x} \Leftrightarrow v(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}$

CORRECTION DEVOIR 14

TS2

DS n°7

<u>exercice 1:</u>

il y a équiprobabilité .le nombre total d'arrivées possibles est 10!

le nombres de cas favorables est $5! * 5!$.(5 choix pour le premier coureur , 4 choix pour le deuxième coureur.......un choix pour le cinquième coureur, à nouveau cinq choix pour le sixième coureur, quatre choix pour le septième coureur.......un choix pour le dixième coureur)

la probabilité est donc :$\dfrac{5! * 5!}{10!} = \boxed{\dfrac{1}{252}}$

<u>Exercice 2:</u>

nous avons, en notation abrégée :

$P(1) = P(2)$

$P(3) = P(4) = P(5)$

$P(1) = 2 * P(3)$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 0,9$

on en déduit: $2 * P(3) + 2 * P(3) + P(3) + P(3) + P(3) = 0,9$

donc $P(3) = \dfrac{0,9}{7} = \dfrac{9}{70}$

la probabilité demandée est donc : $P(1 \text{ ou } 3) = P(1)+P(3) = \dfrac{18}{70}+\dfrac{9}{70} = \boxed{\dfrac{27}{70}}$

<u>exercice 3:</u>

soit: B='la trajectoire est bonne' et C='le cycliste crève'.on a :

$$\begin{array}{cccc}
 & & 0,05 & C \\
 & & \nearrow & \\
0,9 & B & & \\
\nearrow & & \searrow & \\
 & & 0,95 & \overline{C} \\
 & & 0,45 & C \\
\searrow & & \nearrow & \\
0,1 & \overline{B} & & \\
 & & \searrow & \\
 & & 0,55 & \overline{C}
\end{array}$$

1) $P(C) = P(B \cap C) + P(\overline{B} \cap C) = 0,9 * 0,05 + 0,1 * 0,45 = \boxed{0,09}$

2)$P(\overline{B}/C) = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,1 * 0,45}{0,09} = \boxed{0,5}$

le spectateur belge était médusé. Il est maintenant indécis.

exercice 4:

dans cet exercice nous adapterons les notations suivantes :

G='le coureur gagne la course au sprint'

P='le peloton rejoint l'échappée'

D='le coureur réussi son démarrage'

1) la situation est claire. Pour gagner au sprint, il faut que le peloton revienne sur l'échappée puis que le coureur remporte le sprint. On a donc :

$P(G) = P(G \cap P) = P(P) * P(G/P) = 0,9 * 0,4 = \boxed{0,36}$

2)la situation est plus complexe et peut-être schématiser ainsi :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 0,8 & G & & \\
 & & \nearrow & & & \\
0,3 & D & & & & \\
\nearrow & & \searrow & & & \\
 & & 0,2 & \overline{G} & & \\
 & & & & 0,25 & G \\
 & & & & \nearrow & \\
 & & 0,9 & P & & \\
\searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
0,7 & \overline{D} & & & 0,75 & \overline{G} \\
 & & \searrow & & 1 & \\
 & & 0,1 & \overline{P} & \rightsquigarrow & \overline{G}
\end{array}$$

d'où : $P(G) = P(D \cap G) + P(\overline{D} \cap P \cap G) = 0,3*0,8+0,7*0,9*0,25 = \boxed{0,3975}$

3)il y a donc plus de chances de gagner en tentant un démarrage.

exercice 5:(suite de l'exercice 4)

le tirage au sort des deux coureurs parmi les dix premiers est sans importance pour le problème qui nous concerne. On peut donc simplifier la situation en raisonnant ainsi : on tire au sort trois coureurs parmi 68. Quelle est la probabilité que le dossard n^o 13 soit tiré au sort?

nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

Le nombre total de cas est C_{68}^3(on choisit un ensemble de trois coureurs parmi 68).

le nombre de cas favorables est C_{67}^2 (un cas favorable est un ensemble constitué du dossard n^o 13 et de deux autres coureurs parmi 67)

la probabilité recherchée est donc : $\dfrac{C_{67}^2}{C_{68}^3} = \dfrac{67!}{2!65!} * \dfrac{3! * 65!}{68!} = \boxed{\dfrac{3}{68}}$

Ce résultat étonnant à première vue se généralise .Si on désigne k personnes parmi n ,la probabilité qu'une personne donnée soit choisie est :

$$\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} * \frac{k! * (n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}$$

exercice 6:

notons C_1, C_2, C_3 les coureurs et V_1, V_2, V_3 leurs vélos.on peut supposer que les coureurs choisissent successivement un vélo (ça ne change rien le problème).

Le nombre total de cas est donc:$3 * 2 * 1 = 6$

1)il y a bien sûr qu'un cas favorable d'où une probabilité de : $\boxed{\frac{1}{6}}$

2)si C_1 trouve sa bicyclette, alors C_2 doit prendre V_3 et C_3 doit prendre V_2 .cela fait un cas.

on raisonne de même pour C_2 ou C_3.la probabilité recherchée est donc : $\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

3)ce qui est demandé dans cette question est en fait le contraire de 1) et 2).

la probabilité recherchée est donc : $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{3}}$

CORRECTION DEVOIR 15

TS2

DS n°9

Exercice 1:

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = [2\sqrt{x+1}]_0^2 = \boxed{2\sqrt{3}-2}$

$\int_0^1 xe^{3x^2}dx = [\frac{1}{6}e^{3x^2}]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{6}}$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = [\frac{1}{2}(\ln x)^2]_1^e = \boxed{\frac{1}{2}}$

Exercice 2:

1) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{x(a+b)+a}{x(x+1)}$

on a donc : $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^2 = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \boxed{2\ln 2 - \ln 3}$

Exercice 3:

Soit $f(x) = x - 1 + 2e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

1) $f'(x) = 1 - 2e^{-x}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x \leq \ln\frac{1}{2}(= -\ln 2) \Leftrightarrow x \geq \ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^X = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(xe^x - e^x + 2) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$(forme indéterminée mais e^x l'emporte (cf) cours)) et aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

2)on peut appliquer la méthode de recherche vue en cours ou voir que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0$

(Δ) a donc pour équation : $y = x - 1$ (et est asymptote à (C_f) en $+\infty$)

3) $f(x) - (x-1) = 2e^{-x} > 0$ donc (C_f) est au dessus de (Δ)

on a donc : $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) - (x-1)dx = \int_0^\lambda 2e^{-x}dx = [-2e^{-x}]_0^\lambda = -2e^{-\lambda} + 2$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2}$

Exercice 4:

1)on pose : $u'(x) = e^{-x}, v(x) = x^2$ donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 2x$

$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = [-x^2e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx$

on pose : $u'(x) = e^{-x}, v(x) = x$ donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$

on obtient donc : $-\frac{1}{e} + 2([-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx) = -\frac{1}{e} + 2(-\frac{1}{e} - [e^{-x}]_0^1) = -\frac{1}{e} + 2(-\frac{1}{e} - (\frac{1}{e} - 1) = \boxed{2 - \frac{5}{e}}$

---

2)le but de cette question est d'encadrer $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}}dx$

a) $\forall x \in [0;1] :\ 0 \leq x^2 \leq 1$
et $-1 \leq -x \leq 0$ donc $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$
en multipliant ces deux encadrements (constitués de nombres positifs) on obtient : $\boxed{0 \leq x^2e^{-x} \leq 1}$
rq:on pouvait aussi étudier la fonction ....
b)$1 - X \leq \frac{1}{1+X} \Leftrightarrow 1 - X^2 \leq 1$ (car $1 + X \geq 0$) ,ce qui est vrai
$\frac{1}{1+X} \leq 1 - \frac{X}{2} \Leftrightarrow 1 \leq (1+X)(1-\frac{X}{2})$ (car $1 + X \geq 0$)
$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + X - \frac{X}{2} - \frac{X^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{X}{2} - \frac{X^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{X(1-X)}{2}$ ce qui est vrai car $X \geq 0$ et $1 - X \leq 0$ (car $X \in [0;1]$)
c)appliquons le résultat du b) à $X = x^2e^{-x}$ ce qui est possible car $x^2e^{-x} \in [0;1]$ d'après a)
on a donc : $1 - x^2e^{-x} \leq \frac{1}{1+x^2e^{-x}} \leq 1 - \frac{x^2e^{-x}}{2}, \forall x \in [0;1]$
donc : $\int_0^1 1 - x^2e^{-x}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}}dx \leq \int_0^1 1 - \frac{x^2e^{-x}}{2}dx$
$\Leftrightarrow \int_0^1 1dx - \int_0^1 x^2e^{-x}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}}dx \leq \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{x^2e^{-x}}{2}dx$
$\Leftrightarrow \boxed{1 - I \leq K \leq 1 - \frac{I}{2}}$ or $I = 2 - \frac{5}{e} \simeq 0,161$ donc $1 - I \simeq 0,839$ et $1 - \frac{I}{2} \simeq 0,919$
d'où $0,83 < K < 0,93$

<u>Exercice 5 :</u>

1) $F(x) = \int_2^x te^t \ln(t-1)dt$, $\forall t \in]1;+\infty[$
donc $F'(x) = xe^x \ln(x-1)$ qui est du signe de $\ln(x-1)$ car $x > 0$ et $e^x > 0$
$\ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$
Donc F est croissante sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $]1;2]$
2)le minimum de F est donc $F(2)$ or $F(2) = \int_2^2 te^t \ln(t-1)dt = 0$
on en déduit que F est positive sur $]1;+\infty[$

CORRECTION DEVOIR 16

DS n°10 (corrigé)

Exercice 1:

on considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

Vrai ■ Faux□ 1) pour tout n , $0 \leq v_n \leq 1$
Vrai ■ Faux□ 2) si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
Vrai ■ Faux□ 3) si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.
Vrai □ Faux■ 4) si (v_n) est convergente, alors (u_n) est convergente.

1) $u_n \geq 0$ donc $\dfrac{u_n}{1+u_n} \geq 0$ de plus $u_n \leq 1+u_n \Rightarrow \dfrac{u_n}{1+u_n} \leq 1$

2)$u_n \to l \Rightarrow v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \to \dfrac{l}{l+1}$ (rq:$l \neq -1$)

3)$v_{n+1}-v_n = \dfrac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}} - \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{u_{n+1}(1+u_n)-u_n(1+u_{n+1})}{(1+u_{n+1})(1+u_n)} = \dfrac{u_{n+1}-u_n}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}$
du même signe que $u_{n+1}-u_n$

4)contre exemple :$u_n \to +\infty$ et $v_n \to 1$

Exercice 2:

On considère trois suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ tel que :$u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}$

1) si (v_n) tend vers $-\infty$,alors :

□ (w_n) tend vers $-\infty$
■ (u_n) tend vers $-\infty$
■ (u_n) est majorée
□ (w_n) n'a pas de limite

1et 4 sont faux car w_n peut tendre vers $+\infty$ .2 est une application d'un théorème de comparaison .Finalement le plus embêtant à justifier est 3 .comme (u_n) tend vers $-\infty$,les termes de cette suite seront inférieur à 0 (au hasard) à partir d'un certain rang .Ensuite il reste un nombre fini de termes positifs .Mais comme il n'y en a qu'un nombre fini ,on pourra toujours les majorer par une constante........

2) si $u_n > 1$, $w_n = 2u_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l(\in \mathbb{R})$

□ (v_n) tend vers l
□ (w_n) tend vers $+\infty$
■ $(w_n - u_n)$ tend vers l
■ on ne sait pas dire si (v_n) a une limite ou non

$w_n = 2u_n \to 2l$ donc le résultat de 2 et 3 en découle directement .D'autre part v_n navigue entre u_n et w_n et donc n'a pas obligatoirement une limite

3) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$

■ (v_n) est majorée
□ (v_n) tend vers 0
■ (v_n) peut ne pas avoir de limite
□ (u_n) et (v_n) ne peuvent pas être adjacentes

avec les mêmes arguments qu'au 2) on a les réponses du 2 et 3

(v_n), à partir d'un certain rang,a tous ses termes seront inférieurs à 3 (puisque w_n tend vers 2) et donc il ne restera qu'un nombre fini de termes que l'on pourra majorer .....

pour 4 on peut par exemple imaginer :$u_n = -2 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -2 + \dfrac{1}{n}$

<u>Exercice 3:</u>

1)l'ensemble des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est :

□ l'ensemble vide ■ un plan □ une sphère (plan médiateur de $[A; B]$)

2)$E(0; 1; -2)$,$F(2; 1; 0)$.les coordonnées de G barycentre de $(E; 1)$ et $(F; 3)$ sont :

□ $(6; 4; -2)$ ■ $(1,5; 1; -0,5)$ □ $(0,5; 1; 1,5)$voir cours

3)Soit d la droite de représentation paramétrique :$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -3 \end{cases}$

on considère les points $A(2; 3; -3)$, $B(2; 0; -3)$ et $C(0; 6; 0)$ .On a :

□ $d = (AB)$ □ $d = (BC)$ ■ $d \neq (AB), d \neq (BC), d \neq (AC)$

$\overrightarrow{u}(-1; 3; 0)$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{AB}$ ni à $\overrightarrow{BC}$ ni à $\overrightarrow{AC}$

4) Soit d et d' les droites définies par:$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3 - 2t' \\ y = 7 - 4t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$

ces deux droites sont :□ parallèles □ sécantes ■ non coplanaires

$\begin{cases} 1 = 3 - 2t' \\ 1 + 2t = 7 - 4t' \\ 1 + t = 2 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ impossible .les droites ne sont pas sécantes .

$\overrightarrow{u}(0; 2; -1)$ et $\overrightarrow{v}(-2; -4; -1)$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles

5)la droite de représentation paramétrique :$\begin{cases} x = -4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ et le plan d'équation :$x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

□ parallèles ■ orthogonaux □ ni parallèles ni orthogonaux

$\overrightarrow{u}(-4; 3; 2)$ et $\overrightarrow{v}(1; -2; 5)$ sont orthogonaux (produit scalaire nul)